

युक्लिडचे सरल रेखागणिताची
मूलतत्वे.

आविषयाचा मूल ग्रंथ इंग्रजी भाषेत ए. वेल
साहबाने केला आहे, त्याचे हे मराठी भाषांतर

नानाशास्त्री आपटे

पुणे पाठशाळेतील बाल्लेशान् एक्सिबिबानर
द्वारांनी केलेले

मेहरबान डेरेक्टर आफ् पब्लिक इन्स्ट्रक्शन्सचे हुकुमावरून
पुणे पाठशाळेकडील आपरान्यांत

छापिले.



मुकामपुणे

छापणार नारीरामचंद्र ठकार मु. अ.

इसवीसन १९५७

रा. के. १७७२

B 6:6x C70

155A

39806.

39806

39806

सरलरेखागणिताची मूलतत्वे.

बुकपहिले.

१ गणितविद्येमध्ये परिमेय वस्तुविषयी विचार केला आहे.

२ रेखागणित (भूमिति) हा गणितविद्येचा एक प्रकार आहे. त्यामध्ये परिमाणांविषयी विचार आहे.

३ परिमाणांस एक किंवा दोन, किंवा तीन मापे असतात. जसे, रेघेस, लांबी हे एकच माप आहे; पानळीस, लांबी आणि रुंदी अशीं दोन मापे आहेत, आणि भरीं - वास, लांबी, रुंदी आणि उंची अशीं तीन मापे आहेत. परिमाणे आकृतींनीं दर्शविता येतात.

४ सरलरेखागणित (सरळरेषाभूमिति) हा एक रेखागणिताचा भाग आहे. त्यांत पातळीवर काढलेल्या परिमाणांचा विचार केला आहे.

व्याख्या.

१ ज्यास स्थितिमात्र आहे, परंतु परिमाण नाही, बिंदु असे म्हणतात.

२ ज्यास रुंदी नाही, व लांबी मात्र आहे, त्यास रेघ असे म्हणतात.

अ ब
रेघेच्या दोहों टोंकांजवळ एक एक अक्षर लिहून त्या अक्षरांनी प्रायः तिला संज्ञा देतात. जसे, अ ब रेघ. कु० रेघेचीं टोंकें बिंदुरूप असतात, आणि एक रेघ दुसरे रेघेस ज्या स्थळीं छेदिते तें स्थळही बिंदुरूप असते.

३ ज्या रेघा दोन बिंदुस्थळीं जमल्या असतां सर्वांशीं जमल्यावांचून रहातच नाहीत त्यांस सरळरेघा म्हणतात.

कु० ह्यावरून स्पष्ट दिसते, कीं कोणत्याही अवकाशाचें वेष्टन दोन सरळरेघांनीं व्हावयाचें नाही, व दोन सरळ रेघांस साधारण खंडही असावयाचा नाही, कारण त्या अंदातः जमल्या असतां सर्वांशीं जमल्यावांचून राहावयाच्या नाहीत.

जसे, अ ब क आणि

अ ब ड ह्या दोन रेघांस

अ ब

अब मंड साधारण आई, परंतु त्या दोन्ही कोही सरळ रेखा नाहीत.

४ वांकडीरेख दोन किंवा दोहोंपेक्षा अधिक सरळ रेखांच्या योगाने होते.

५ ज्या रेखेचा एकही अंश सरळरेख नसतो तीस वक्ररेखा म्हणतात.

६ सरळ आणि वक्ररेखा मिळून जी रेख होते तिला मिश्ररेखा म्हणतात.

७ ज्या वक्ररेखेचा दोहोंपेक्षा अधिक ठिकाणी सरळ रेखेने छेद होत नाही, ती रेख

बहिर्वक्र किंवा अंतर्वक्र -

क्र असते. वक्ररेखेची छेदक रेखेकडे जी वक्रता असते ती अंतर्वक्रता, आणि उलट दिशेकडे जी असते ती बहिर्वक्रता.

८ ज्यास कोबी वळदी ही पात्र असतात त्यास पातळी असे म्हणतात.

कु० पातळीची चौकट रेखा होत, आणि एक पातळी त्या पातळीस ज्या स्थळी छेदिते, ते स्थळ रेखाकूप

सामान्यतः रेख म्हणजे असता सरळरेख असे समजावे.

९ ज्या पातळीवर कोठेही दोन बिंदु घेतले असता त्यांच्या मधील सरळरेष सर्वोर्दी पातळीत असते, त्या पातळीस सरळपातळी असे म्हणतात.

१० एका सरळ रेषेत नसणाऱ्या अशा दोन त्रिकोणां परस्परांस मिळाल्या असता त्यांच्यामध्ये जी रेषा घेतली तीस सरळरेषा कोन असे म्हणतात.

ज्या रेषांच्यामध्ये कोन असतो त्या रेषांस त्याच्या बाजू असे म्हणतात, आणि त्या ज्या बिंदूत एकत्र मिळतात त्या बिंदूस कोणबिंदु

असे म्हणतात. जसे, अब

आणि बड रेषा ब बिंदूत

मिळून अबड कोन करि

तात. त्यास अब आणि बड ह्या रेषा अबड कोना

च्या बाजू होत, व ब हा कोणबिंदु होय. कोनाच्या बा

जूंस संज्ञा देण्याकरितां जीं तीन अक्षरें घोजितात त्याच

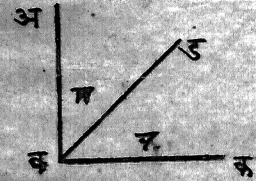
तीन अक्षरांनीं कोनासही संज्ञा देण्याची चाल आहे, परंतु

कोणबिंदूवर लिहिलेलें अक्षरमात्र मध्ये आणतात.

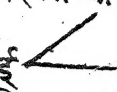
जसे, अब आणि बड ह्या दोन रेषांच्या मधील

नास अबड किंवा डबअ असे म्हणतात.


ड आणि बक ह्या रेषांच्या मधील कोनास डक

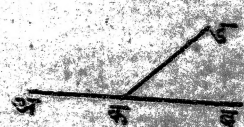


क किंवा क ब ड असे म्हणतात; अब आणि व
क ह्या रेखांच्या मधील कोनास अब क किंवा क ब
म्हणतात.

११. एका बिंदूत एकच कोन झाला असला तर त्याच्या
एकच अक्षर पुरते. जसे, ई कोन. 
कोनामध्ये एक अक्षर लिहून त्यानेही कोनास सं-

ज्ञा देतात. जसे, अब ड कोनास म कोन व ड ब क
कोनास न कोन म्हणून असतां चालेल.

११. एक रेघ दुसरे रेघेवर उभी असून जे दोन कोन
पडतात ते जर परस्पर बरोबर असतील तर त्यांपैकीं प्रत्ये-
कास काटकोन म्हणावे, आणि जी रेघ उभी असते तीस
लंब म्हणावे. 

१२. एक रेघ दुसरे रेघेस मिळाली असतां तिचे एकेच
आंगास जे दोन कोन पडतात, त्यांस पूरककोन (सप्लि-
मेंट) म्हणतात. जसे, अब रेघेस ड क रेघ मिळून
अ क ड आ गे व क ड असे
दोन कोन पडले आहेत त्यांस पूर-
ककोन म्हणतात. 

कोणताही कोन आणि काटकोन ह्यांच्या मधल्या
मंतराचा जो कोन त्यास भरतीचा कोन (कॉम्प्लिमेंट)

असें म्हणतात. (हाहाच्या व्याख्येची आकृति पाहा) अ
व क कोन काढकोन आहे, व म आणि न हे भरतीचे
कोन होत.

१३ काढकोनापेक्षां जो कोन मोठा असतो त्यास
शाळकोन म्हणतात.

१४ काढकोनापेक्षां जो लहान असतो त्यास लघु-
कोन म्हणतात.

१५ जो कोन काढकोन नसतो त्यास तिर्यक्कोन
असें म्हणतात. काढकोनाहून जे दोन कोन लहान किंवा
मोठे असतात त्यांस सजातीयकोन म्हणतात.

१६ ज्याचे सभोवतीं मर्यादेच्या रेखा असतात त्यास
आकृति असें म्हणावे. कोणत्या एका आकृतीमध्ये जो
अवकाश असतो त्यास क्षेत्र म्हणावे, आणि तेच मापले
असतां त्यास क्षेत्रफल म्हणावे.

१७ जी आकृति एका वक्ररेषेने वेष्टित असते व जी
मध्ये असा एक बिंदु असतो, कीं ज्यापासून त्या वक्ररेषे-
पर्यंत कितीही रेखा काढल्या असतां त्यांची लांबी सार-
खी भरते त्या आकृतीस वर्तुळ असें म्हणतात, त्या वेष्ट
णाऱ्या वक्ररेषेस वर्तुळाचा परिघ
असें म्हणतात व त्या विरोधबिंदूस



વર્તુલ્લાન્વા મધ્યબિંદુ અસેં મ્હળતાત

૧૮ વર્તુલ્લાંતીલ મધ્યબિંદુશિવાય દતરબિંદૂંસ મધ્ય-
બાહ્યબિંદુ મ્હળતાત.

૧૯ વર્તુલ્લાન્વા મધ્યાપામૂન પરિધાપર્યંત કાદલેલ્યા
રેખેસ ત્રિજ્યા અસેં મ્હળતાત.

૨૦ જી રેખ વર્તુલ્લમધ્યબિંદૂંતૂન જાડન પરિધાસ દો-
હી અંગાંનીં મિકતે ત્યા રેખેસ વર્તુલ્લાન્વા વ્યાસ અસેં
મ્હળતાત.

૨૧ વ્યાસ વ ત્યાનેં હેદલેલા પરિધાન્વા ભાગ દ્વા રોહોં-
ન્વા મધ્યેં જો વર્તુલ્લાન્વા ભાગ સાંપડતો, ત્યાસ અર્ધવર્તુ-
લ અસેં મ્હળતાત.

૨૨ જ્યા આકૃતિ સરલરેખાંનીં દ્વાલ્યા અસતાત ત્યાંસ
સરલરેખાકૃતિ મ્હળતાત.

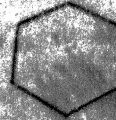
૨૩ ત્રીન સરલરેખાંનીં જી આકૃતિ વેદિત અસતે ત્રીસ
સરલરેખત્રિકોણ અસેં મ્હળતાત.





૨૪ ચાર સરલરેખાંનીં જી આકૃતિ વેદિત અસતે ત્રીસ
સરલરેખચતુષ્કોણ અસેં મ્હળતાત.

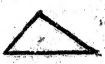


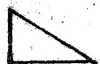
૨૫ ત્રહૂંપેક્તાં અધિક સરલરેખાંનીં જી આકૃતિ વેદિત
અસતે ત્રીસ વહુકોણાકૃતિ અસેં
મ્હળતાત.





२६ ज्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू सम असतात त्यास
समभुज (समबाजू) त्रिकोण म्हणतात. 

२७ ज्या त्रिकोणाच्या दोनच बाजू सम असतात त्यास
समद्विभुज (समद्विबाजू) त्रिकोण म्हणतात. 

२८ ज्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू विषम असतात त्यास
विषमभुज (विषमबाजू) त्रिकोण म्हणतात. 

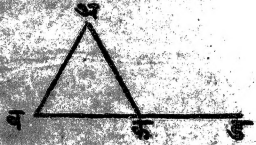
२९ ज्या त्रिकोणांत एक कोन काटकोन असतो त्यास का-
टकोन त्रिकोण म्हणतात. 

३० ज्या त्रिकोणामध्ये एक विशालकोन असतो त्यास
विशालकोन त्रिकोण असे म्हणतात. 

३१ ज्या त्रिकोणाचे तिन्ही कोन लघु असतात त्यास
लघुकोन त्रिकोण असे म्हणतात. 

३२ दोन रेषांनी परस्परांस छेदिले असतां जे कोन समोरा
समोर होतात, त्यांस समोरासमोरचे कोन असे म्हण-
तात. जसें, अ ई क आणि ब ई ड

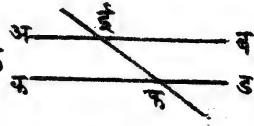
हे समोरासमोरचे कोन होत. 

३३ त्रिकोणाची कोणतीही बाजू वाढविली असतां
बाहेरल्या अंगास जो कोन होतो
त्यास बाहेरील कोन म्हणतात.
जसें, अ क ड हा बाहेरील कोन आहे. 

३४ ज्या दोन सरळरेषा एका पातळीत असून दोन्ही अंगांस कितीही वाढविल्या असतां एकमेकींस मिळत नाहीत त्यांस समांतर सरळरेषा असें म्हणतात.

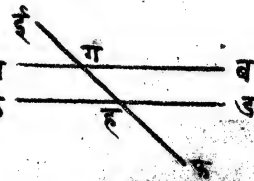
३५ दोन समांतर सरळ रेषांस छेदणारी किंवा त्यांवर पडणारी जी रेषा तिला छेदकरेखा

असें म्हणतात. जसें, ई फ ही छेदक रेषा आहे.



३६ छेदकरेखेनें समांतर रेषांच्या जोडामध्ये जे कोन होतात, त्यांस अंतर्कोन म्हणतात,

ब समांतर रेषांच्या जोडाच्या बाहेर जे कोन होतात त्यांस बाह्य कोन



म्हणतात. जसें, अ ग ह, ब ग ह, क ह ग आणि ग ह ड हे अंतर्कोन, आणि अ ग ई, ब ग ई, क ह फ आणि ड ह फ हे बाह्य कोन,

३७ छेदकरेखेच्या भिन्न अंगांस असून समोर समोर असणारे जे कोन त्यांस व्युत्क्रमकोन म्हणतात. त्यांत समांतर रेषांच्या जोडाच्या मध्ये जे असतात ते अंतर्व्युत्क्रमकोन, आणि बाहेर असतात ते बाह्यव्युत्क्रमकोन. जसें, (वरील आकृतीत) अ ग ह आणि ड ह ग किंवा ब ग ह आणि क ह ग हे

अंतर्व्युक्रमकोन, आणि ई ग ब आणि क ह -
फ किंवा अ ग ई आणि उ ह फ हे बाह्यव्युक्रम-
मकोन.

३८ कोणत्याही आकृतीचे सर्वकोण सम असल्यास तीस समकोणाकृति म्हणतात, आणि ज्या आकृतीच्या सर्वबाजू सारख्या असतात तीस समभुजाकृति असें म्हणतात.

३९ एका आकृतीचे कोन दुसऱ्या आकृतीचे कोनाबरोबर क्रमानें असल्यास त्या दोन्ही आकृतीस समकोण आकृति असें म्हणतात. ज्या आकृतीच्या बाजू अनुक्रमानें सारख्या असतात त्यांस समभुज आकृति असें म्हणतात.

४० ज्या चौकोनाच्या चारीबाजू सारख्या असून चारीकोन काटकोन असतात त्यास चौरस असें म्हणतात.



४१ ज्या चौकोनाचे चारीकोन काटकोन असतात, परंतु सर्वबाजू सारख्या नसतात त्यास काटकोनचौकोन असें म्हणतात.



४२ ज्या चौकोनाच्या सर्वबाजू सारख्या असतात, पण कोन काटकोन नसतात त्यास



समभुज समांतरचौकोन (राम्बस) असें म्हणतात.

४३ ज्या चौकोनाच्या समोरासमोरच्या बाजू समांतर असतात त्यास समांतरभुज (समांतरबाजू) चौकोन असें म्हणतात.



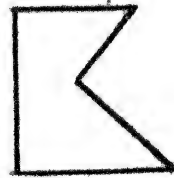
४४ ज्या चौकोनाच्या दोन बाजू मात्र समांतर असतात त्यास त्रापिजेंद असें म्हणतात.



४५ वर सांगितलेल्या आकृती शिवाय जितक्या चार बाजूंच्या आकृति आहेत त्यांस त्र्यापिज्यम् म्हणतात.



४६ कोणत्याही सरलरेषाकृतींत दोन काटकोनांहून जो कोन कमी असतो त्यास सेलिअंट असें म्हणतात, आणि दोन काटकोनांहून जो अधिक असतो त्यास रीएंग्रंट असें म्हणतात.



४७ सरलरेषाकृतीच्या कोणत्याही बाजूस पाया म्हटले असतां चिंता नाही. काटकोन त्रिकोणांत काटकोना समोरच्या बाजूस कर्ण म्हणतात, आणि राहिलेल्या

दोन बाजूंपैकी एकीस भुज किंवा लंब आणि दुस-
 रीस कोटी असें म्हणतात. समद्विभुज त्रिकोणांत समान
 बाजूं खेरीज जी तिसरी बाजू असते तीस पाया असें
 म्हणतात. कोणत्याही त्रिकोणाच्या पाया समोरील कोण
 बिंदूस शिर असें म्हणतात, आणि कोनास शिरकोन
 असें म्हणतात.

४८ त्रिकोण किंवा समांतरभुजचौकोन ह्यांची उंची मूढ-
 ली म्हणजे पायावर समोरील कोणबिंदूपासून किंवा बाजू
 पासून काढलेला जो लंब तो समजावा.

४९ चौकोनांत समोरासमोरच्या कोनांचे बिंदूंस सांध -
 णाच्या ज्या रेषा त्यांस कर्णरेषा असें म्हणतात.

પ્રત્યક્ષપ્રમાણે.

૧. એકાન્વ પદાર્થાંશીં બરોબર અસનાર જે અનેક પદાર્થ તે પરસ્પર બરોબર અસતાત.
૨. સમપદાર્થોત સમપદાર્થ મિઠવિલે અસતાં ત્યાંચાં બેરજા સમહોતાત.
૩. સમપદાર્થોત સમપદાર્થ વજા કેલે અસતાં ત્યાંચાં વાક્યા સમ રાહાતાત.
૪. વિષમપદાર્થોત સમપદાર્થ મિઠવિલે અસતાં બેરજા વિષમ હોતાત.
૫. વિષમપદાર્થોત સમપદાર્થ વજા કેલે અસતાં ત્યાંચાં વાક્યા વિષમ રાહાતાત.
૬. જે પદાર્થ દુસચા એકા પદાર્થાંચાં દુષ્ટ અસતાત તે પરસ્પર બરોબર અસતાત.
૭. જે પદાર્થ દુસચા એકા પદાર્થાંચાં અર્થાં બરોબર અસતાત તે પરસ્પર બરોબર અસતાત.
૮. જ્યાં આકૃતિ પરસ્પરાંશીં મિઠતાત સ્થળ જે એક જ જાગાં વ્યાપ્ત રાહાતાત ત્યાં પરસ્પર બરોબર અસતાત.
૯. સંગઠા પદાર્થ આપણા અંશાપેક્ષાં મોઠા અસતો.
૧૦. સર્વકાલકોન પરસ્પર બરોબર અસતાત.

११ एकेच बिंदूतून एकेच रेघेचीं दोन समांतर रेघा काढल्या असतां त्या परस्परांचीं मिळतील, म्हणजे एकेच ठिकाणीं पडतील निराक्या राहाणार नाहीत.

१२ कोणत्याही एका आकृतीचीं सर्वांचीं सारखी अशी दुसरी आकृति असणें शक्य आहे.

सरलरेखागणितांतील मुख्यमुख्यशाखांचीं लक्षणे.

१ सिद्ध शालेली जी गोष्ट तीस सिद्धांत म्हणावें. प्र -
मेय (थियरम) कृत्य (प्राब्लेम) आणि साधक -
सिद्धांत (लेमा) असे सिद्धांताचे तीन प्रकार आहेत.

२ ज्या सिद्धांतामध्ये केवळ सिद्धताच करावयाची असते त्यास प्रमेय म्हणावें.

३ ज्या सिद्धांतामध्ये कांहीं कृति करावयाची असते त्यास कृत्य म्हणावें.

४ अन्यसिद्धांताच्या सिद्धतेस जो सिद्धांत साधन होतो त्यास साधक सिद्धांत म्हणावें.

५ सिद्धांताच्या प्रतिज्ञेत किंवा उपपादनांत जी गोष्ट प्रमाणावांचून खरी मानलेली असते तीस सिद्धबद्द -
हीत गोष्ट असें म्हणावें.

६ एक किंवा अनेक सिद्धांतांपासून जें अनुमान होतें त्यास **कुरलरी** म्हणावें.

७ एक किंवा अनेक सिद्धांत ह्यांची योजना, संबंध, मर्यादा, व्याप्ति अथवा तत्संबंधी कांहीं विशेष दाखविण्या करितां जें कांहीं लिहिलें असतें त्यास **टीप** (स्कोलियम) म्हणावें.

८ सिद्धांताचें जें कथन त्यास **प्रतिज्ञा** म्हणावें.

९ प्रतिज्ञेंत सांगितलेल्या गोष्टीचें जें उपपादन त्यास **सिद्धता** म्हणावें. सिद्धता **क्रमिक** आणि **क्रमवि-
रुद्ध** अशी दोन प्रकारची आहे.

१० ज्या सिद्धतेत सांगितलेली गोष्ट सिद्ध केली असते ती **क्रमिक**.

११ ज्या सिद्धतेत सांगितलेल्या गोष्टीची उलट संभवत नाही असें दाखविलें असतें ती **क्रमविरुद्ध**.

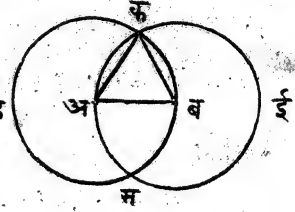
१२ सांगितलेल्या नियमां प्रमाणें रेषा किंवा बिंदु घेणें ह्यास **कृति** म्हणावें.

१३ ज्या गोष्टी अथवा जे संबंध सांगितले असतात आणि ज्यांपासून नव्या गोष्टी व नवे संबंध सिद्ध करावयाचे असतात त्यांस **डेटा** म्हणावें.

१ सिद्धांत.

कोणत्याही समर्याद सरळ रेघेवर समभुज त्रिकोण काढावयाचा.

अब एक समर्याद सरळ रेघ आहे, तीवर म्हणजे ती पायाधरून समभुज त्रिकोण काढावयाचा आहे.



अ मध्य कल्पून अब त्रिज्येने बकड वर्तुळ काढ, आणि ब मध्य कल्पून बअ त्रिज्येने अकई वर्तुळ काढ. हीं वर्तुळें ज्या बिंदूंत परस्परांस छेदतात त्यांतील एका बिंदूस क अशी संज्ञा दे. नंतर अ, क आणि क, ब सांध. आतां अबक हा समभुज त्रिकोण झाला.

कारण, अ हा बसडक वर्तुळाचा मध्य आहे, त्या करितां अब आणि अक ह्या रेषा (१७ व्या व्याख्येवरून) परस्पर बरोबर आहेत, व ब हा अकई वर्तुळाचा मध्य आहे, त्या करितां बअ, बक बरोबर आहे, म्हणून अब रेषा अक आणि बक ह्या प्रत्येक रेषेची बरोबर आहे, म्हणून (१ प्रत्यक्ष प्रमाणावरून) अक, बक बरोबर आहे. तेव्हां अक, अब, आणि बक ह्या रेषा परस्पर बरोबर आहेत, म्हणून अबक

ह्या करितां हे त्या रेखांदून वजा केले असतां (१ व्या म
त्यक्ष प्रमाणाप्रमाणे) बाकीचे भाग बग आणि अ
ल हे परस्पर बरोबर होतील. पण बग बस बरोब
आहे असें पूर्वी सांगितलें आहे, ह्या करितां बस आणि
अल ह्या रेखां प्रत्येक बगशीं बरोबर आहेत, ज्या दोन
वस्तु दुसऱ्या एका वस्तूशीं बरोबर असतात त्या परस्पर ब
रोबर असतात, म्हणून अल रेघ बस रेघे बरोबर
आहे.

३ सिद्धांत.

विषक्षित दोन विषम रेखांपैकीं मोठ्या रेघेचा
लहान रेघे एवढा तुकडा पाडावयाचा.

अब आणि स ह्या दोन विषम रेखा आहेत, त्यां
मध्ये अब ही रेघ स रेघे
पेक्षां मोठी आहे, त्यास स
रेघे एवढा अब रेघेचा तु-
कडा पाडावयाचा आहे.

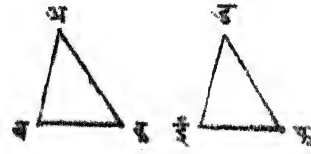


अ बिंदूपासून स रेघे एवढी (१ व्या सि०
म०) अउ रेघ काढ, आणि अ मध्य धरून अउ त्रिज्ये
ने डईफ वर्तुळ काढ. अ बिंदु डईफ वर्तुळाचा मध्य

आहे, ह्या करितां अई रेघ अड रेघे बरोबर आहे. प-
ण अड रेघ सरेघे बरोबर केली आहे, ह्या करितां (१ प्रत्यक्ष
प्र० व०) अई रेघ स रेघे बरोबर आहे. तेव्हां अ
ब मोठ्या रेघेचा अई तुकडा स लहान रेघे एवढा
पडला आहे, हे सिद्ध.

४ सिद्धांत.

ज्या दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू व त्यांच्या
मधील कोन हीं दुसऱ्याच्या
दोन बाजू व त्यांच्या मधील
कोन ह्यांशीं अनुक्रमे बरोबर
असतात ते दोन त्रिकोण पर-



स्पर सर्वांशीं सारखे असतात, म्हणजे एकाची निमरी बाजू
दुसऱ्याच्या निमरे बाजू बरोबर असते, व एकाचे इतर
कोन दुसऱ्याच्या इतर कोनां बरोबर असतात, ते असे, कीं
ज्या बाजू बरोबर असतात त्यां समोरील कोन परस्पर
बरोबर असतात.

अबक आणि डईफ असे दोन त्रिकोण आहेत,
अबक त्रिकोणाच्या अब आणि अक ह्या दोन बाजू
डईफ त्रिकोणाच्या डई आणि डफ ह्या दोन बाजूंशीं

अनुक्रमें बरोबर आहेत, आणि अ ब आणि अ क ह्या दोन बाजूंच्या मधील ब अ क कोन ड ई आणि ड फ ह्या दोन बाजूंच्या मधील ई ड फ कोना बरोबर आहे, त्यास हे दोन त्रिकोण सर्वोशीं सारखे आहेत, म्हणजे ब अ क त्रिकोणाची तिसरी बाजू ब क ही ई ड फ त्रिकोणाच्या तिसऱ्या ई फ बाजूशीं बरोबर आहे, आणि ब अ बाजू समोरील क कोन ब अ च्या बरोबरीची जी ड ई बाजू तिच्या समोरील फ कोना बरोबर आहे, व अ क बाजू समोरील ब कोन ड फ बाजू समोरील ई कोना बरोबर आहे.

जर अबक त्रिकोण ड ई फ त्रिकोणावर असा ठेविला, कीं अ बिंदु ड बिंदूवर पडेल, आणि अ ब रेष ड ई रेषेवर पडेल, तर ब बिंदु ई बिंदूवरच पडेल, कारण अ ब रेष ड ई रेषे बरोबर आहे. अब रेष ड ई रेषेशीं मिळून गेली आहे, ह्या करितां अ क रेष ड फ शीं मिळून जाईल, कारण ब अ क कोन ई ड फ कोना बरोबर आहे, आणि क बिंदु फ शीं मिळून जाईल, कारण अ क बाजू ड फ बाजू बरोबर आहे, आतां ब बिंदु ई बिंदूवर पडला आहे, व क बिंदु फ वर पडला आहे, ह्या करितां (३ व्या ह्या. कु. प्र.) ब क बाजू ई फ बाजूवर पडेल, व विशीं बरोबर होईल. ह्यावरून स्पष्ट दिसतें, कीं,

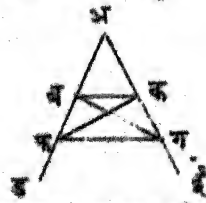
अब क त्रिकोण डईफ त्रिकोणावर बरोबर पडेल. त्या क-
 रितां अब क त्रिकोण डईफ त्रिकोणा बरोबर आहे, व त्यांचे
 बाकीचे कोन ही परस्पर बरोबर आहेत, म्हणजे अब बाजूचे
 समोरील फ कोन अवबरोबरीची जी डईड बाजू तिच्या समो-
 रील फ कोना बरोबर आहे, व अक बाजूचे समोरील ब
 कोन अकचे बरोबरीची जी डफ बाजू तिचे समोरील
 ई कोना बरोबर आहे.

५ सिद्धांत.

समद्विभुज त्रिकोणांत पायाकडील कोन
 बरोबर असतात, व समभुज वाढविले असतां पायाच्या
 बाहेरले अंगास जे कोन पडतात तेही परस्पर बरोबर
 होतात.

अब क एक समद्विभुज त्रिकोण आहे, त्याच्या अ-
 ब आणि अक त्या दोन बा

जू परस्पर बरोबर आहेत, व ह्या
 बाजू ड आणि ई ह्या बिंदूंप-



र्यंत अनुक्रमे वाढविल्या आहेत, त्यास बक पायाकडील अब-
 क आणि अक ब हे कोन परस्पर बरोबर आहेत, व पायाचे
 बाहेरचे अंगचे कोन डबक आणि ईबक हेही परस्पर बरो-
 वर आहेत, हे सिद्ध करावयाचे.

अड रेघेंत एक फ बिंदु वे, आणि (३-या सि० प्र०)
 मोटी जी अई रेघ हिची लहान जी अफ रेघ हिच्या एवढा
 अग तुकडा पाड, आणि फ, क आणि ब, ग सांध.

अफक आणि अगब ह्या दोन त्रिकोणांत अफ
 बाजू अग बाजू बरोबर आहे, व अब बाजू अक बाजू
 बरोबर आहे, व अ कोन दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे,
 व बरोबर ज्या बाजू आहेत त्यांचे आंत सांपडला आहे, ह्या
 करितां (४थ्या सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण एकरूप, म्हणून
 फक बाजू बग बाजू बरोबर आहे, अकफ कोन अब-
 ग कोना बरोबर आहे, व अफक कोन अगब कोना बरो-
 बर आहे. अफ बाजू अग बाजू बरोबर आहे, व अब तु-
 कडा अक तुकड्या बरोबर आहे, ह्या करितां (३ प्र० प्र०)
 फब तुकडा गक तुकड्या बरोबर आहे, आतां वर सिद्ध
 कले कीं फक बाजू बग बाजू बरोबर आहे, व फ कोन ग
 कोना बरोबर आहे, तेव्हां ब फक त्रिकोणाच्या फक आणि
 फब ह्या दोन बाजू व फ अंतर कोन बगक त्रिकोणाच्या
 गब आणि गक ह्या दोन बाजू व ग अंतर कोन ह्यांशीं
 अनुक्रमें बरोबर आहेत, ह्या करितां हे दोन त्रिकोण एक-
 रूप, म्हणून (४थ्या सि० प्र०) फक समोरील ब कोन फक-
 च्या बरोवरीची जी बग बाजू हिच्या समोरील क कोना बरोबर

आहे, व फ क व कोन ग व क कोना बरोबर आहे. पण
अ ब ग कोन अ क क कोना बरोबर आहे, असे पूर्वी सिद्ध
केले आहे, आणि आतां सिद्ध केले, कीं ग व क कोन फ
क व कोना बरोबर आहे, ह्यास्तव पायाकडील अ ब क
आणि अ क व हे कोन बरोबर आहेत, हें स्पष्ट आहे, आणि
पायाच्या बाहेरच्या अंगचे कोन फ व क आणि ग क व
हे परस्पर बरोबर आहेत, हें वर सिद्ध केलेच आहे.

कु० समभुज त्रिकोण समकोण असतात, हें वरच्या
सिद्धतेवरून स्पष्ट आहे.

टी० पायाला छेदणाऱ्या रेषेनें अ शिरकोनाचे समान
दोन भाग केले असतां हा सिद्धांत स्वल्पीरतीनें सिद्ध होतो,
कारण असें केले असतां अ व क त्रिकोणांत दोन त्रिकोण
पडतात, आणि ते (५ व्या सि० प्र०) बरोबर होतात.
तेकां पायाकडील कोन बरोबर आहेत, हें अर्थातच सिद्ध
होतें. १२ वा सि० सिद्ध झाल्यावर पायाच्या बाहेरच्या
अंगचे कोन परस्पर बरोबर असतात, हें सहज दाखवि-
तां येईल, आतां कोनाचे दोन समान भाग कसे करावे, हें
नववा सिद्धांत सिद्ध होण्याचे पूर्वी माहीत होणार नाहीं
खरे, पण ह्या सिद्धांताचे सिद्धतेस कांहीं बाध येत नाहीं,
कारण कोणती तरी रेषा शिरकोनाचे दोन भाग समान

करील हें स्पष्ट आहे.

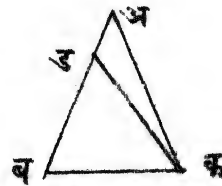
ज्याचा शिरकोन व समबाजू अबक समद्विभुज त्रिकोणाचा शिरकोन व समबाजू खांदीं बरोबर आहेत, असा एक समद्विभुज त्रिकोण कलिला असतां हा सिद्धांत स्वल्परीतीनें सिद्ध होतो. ४ व्या सिद्धांतांतील अबक आणि डईफ हे दोन त्रिकोण ह्या तऱ्हेचे आहेत असें कल्पूं अबक त्रिकोणाचा व कोन डईफ त्रिकोणाच्या ई कोना बरोबर आहे हें सिद्धच आहे. परंतु ह्या दोन समद्विभुज त्रिकोणांत अक आणि अब ह्या दोन बाजू अनुक्रमें ईड आणि डफ ह्या दोन बाजू बरोबर आहेत, आणि अ कोन ड कोना बरोबर आहे, त्यास (४ व्या सि० प्र०) क कोन ई कोना बरोबर आहे. आतां व आणि क हे कोन प्रत्येक ई कोना बरोबर आहेत, ह्याकरितां व आणि क हे परस्पर (१ प्र० प्र०) बरोबर आहेत.

६ सिद्धांत.

त्रिकोणांत दोन कोन बरोबर असले तर त्यांच्या समोरील बाजू ही बरोबर असतात.

अबक एक त्रिकोण आहे. त्याचे व आणि क हे कोन परस्पर बरोबर आहेत, त्यास व कोना समोरील

अक बाजू ही क कोनासमो
रील अब बाजू बरोबर आ
हे.



अब आणि अक ह्या दोन रेषा परस्परांशीं बरो-
बर नाहीत असें मानल्यास त्या दोहों पैकीं एक दुसरीपक्षां
मोठी आहे असें मानिलें पाहिजे: म्हणून अब बाजू अक
बाजूपेक्षां मोठी आहे असें मान, आणि अब मोठ्या बाजूचा
अक लहान बाजू एवढा (३ व्या सि० प्र०) बड तुकडा पाड;
आणि डक साध. बडक आणि अबक ह्या दोन त्रिको-
णांत बड बाजू अक बाजू बरोबर आहे, बक बाजू से-
न्ही त्रिकोणांस साधारण आहे, व व अंतर कोन क अंतर
कोना बरोबर आहे, ह्या करितां (४ व्या सि० प्र०) डब-
क त्रिकोण अबक त्रिकोणा बरोबर आहे. पण लहान
पदार्थ मोठ्या पदार्था बरोबर होणें अशक्य आहे, ह्या करि-
तां अब बाजू अक बाजूशीं असमान नाहीं, तर समा-
नच आहे.

कु० समकोण त्रिकोण समभुज असतात.

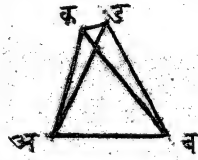
७ सिद्धांत.

एकापायावर आणि त्याचे एकेच अंगास, ज्या दोन

त्रिकोणांच्या एके अंगाच्या बाजू पायाच्या एके टोंकांत समाप्त होऊन बरोबर असतील, तसेंच दुसऱ्या अंगाच्या बाजू पायाच्या दुसऱ्या टोंकांत समाप्त होऊन बरोबर असतील, असे दोन त्रिकोण कदापि होणार नाहीत.

असे दोन त्रिकोण एका पायावर आणि त्याचे एकेच अंगास होतील असें शक्य मानल्यास, अब पायावर त्याचे एकेच अंगास अबक आणि अबड हे दोन त्रिकोण आहेत,

आणि यांच्या एका अंगाच्या बाजू अक आणि अड



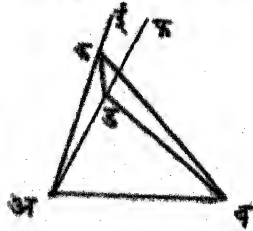
ह्या अ बिंदूत समाप्त होतात, व बरोबर आहेत, व दुसऱ्या अंगाच्या बाजू बक आणि बड ह्या व बिंदूमध्ये समाप्त होतात, व परस्पर बरोबर आहेत, असें मानिले.

अबक आणि अबड ह्या दोन त्रिकोणांच्या स्थितीचा तीन प्रकारचा संभव आहे. एक प्रकार असा की, दोन्ही त्रिकोणांपैकी एकाचाही शिरबिंदु दुसऱ्या त्रिकोणांमध्ये असणार नाही, दुसरा प्रकार असा की, एकाचा शिरबिंदु दुसऱ्यामध्ये पडेल, आणि तिसरा प्रकार असा की, एकाचा शिरबिंदु दुसऱ्याच्या बाजूवर पडेल.

प्रथमतः पहिल्या प्रकाराविषयीं विचार करूं.
 कड सांधली; अक बाजू अड बरोबर आहे. त्याकरितां
 (५. व्या. सि. प्र०) अकड कोन अडक कोना बरोबर
 आहे; अकड कोन बकड कोनापेक्षां मोठा आहे, त्या-
 करितां अकड कोनाचे बरोबरीचा जो अडक कोन हा
 ही बकड कोनापेक्षां मोठा आहे; पण बडक कोन तर
 बकड कोनापेक्षां फारच मोठा आहे, कारण अडक
 कोन बडक कोनाचा तुकडा आहे. बड बाजू बक
 बाजू बरोबर आहे, त्याकरितां बकड कोन बडक को-
 ना बरोबर आहे; पण आतांच सिद्ध केले, कीं बडक
 कोन बकड पेक्षां फारच मोठा आहे, त्यास अबक आ-
 णि अडक त्या दोन त्रिकोणांची पहिल्या प्रकारची स्थि-
 ति अशक्य होय.

आतां दुसऱ्या प्रकारच्या स्थितीविषयीं विचार
 करूं. अबड त्रिकोणाचा शिरबिंदु ड, अबक त्रि-
 कोणाचे आंत पडला आहे.

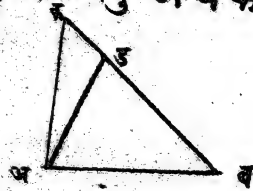
क आणि ड हे बिंदु प्रथमतःच
 सांधिले आहेत; अक आणि
 अड त्या दोन बाजू ई आ-



णि फ हा बिंदू पर्यंत अनुक्रमे वाढवल्या. अकड त्रि-
 कोणांत अक बाजू अड बाजू बरोबर आहे, म्हणून
 (५ व्या सि० प्र०) कड पायाच्या बाहेरच्या अंगचे को-
 न फडक आणि ईकड हे परस्पर बरोबर आहेत;
 पण ईकड कोन बकड कोनापेक्षां मोठा आहे, हा
 करितां ईकड कोना बरोबरीचा जो कोन कडफ
 हाही बकड कोनापेक्षां मोठा आहे, बडक कोन तर
 बकड कोनापेक्षां फारच मोठा आहे, कारण कडफ
 कोन बडक कोनाचा तुकडा आहे; बकड त्रिकोणां-
 त बक बाजू बड बाजू बरोबर आहे, हा करितां ब-
 कड कोन बडक कोना बरोबर आहे; पण तुकटेंच
 मिडू केले, कीं बकड कोन बडक कोनापेक्षां फारच
 मोठा आहे, हास्तच अबड आणि अकब हा दोन
 त्रिकोणांची ही स्थितिही अशक्य आहे.

तिसऱ्या प्रकाराविषयी विचार.

अबड त्रिकोणाचा ड शिरबिंदु अबक
 त्रिकोणाच्या बक बाजूवर
 पडला आहे. पण अबक
 आणि अबड हा दोन त्रि-
 कोणांच्या हा प्रकारच्या



स्थितीची अशक्यता आकृति मनांत आणतांच दिसून येते,
ती दाखविण्यास सिद्धतेची गरज नाही.

८ सिद्धांत.

ज्या दोन त्रिकोणांत एकाच्या तीन बाजू दुसऱ्या-
च्या तीन बाजूंशीं अनुक्रमें बरोबर असतात ते दोन त्रिको-
ण परस्पर सर्वांशीं बरोबर असतात.

अबक आणि डईफ हे दोन त्रिकोण आहेत.
अबक त्रिकोणाच्या अब, अक आणि बक ह्या बाजू
डईफ त्रिकोणाच्या डई, डफ आणि ईफ ह्यांशीं अनु-
क्रमें बरोबर आहेत. त्यास
हे दोन त्रिकोण एकरूप हें
सिद्ध करावयाचें.



मनांत आण, कीं अबक त्रिकोण डईफ त्रि-
कोणावर असा ठेविला, कीं ब बिंदु ई बिंदूवर पडेल, आ-
णि बक बाजू ईफ बाजूवर पडेल. आतां क बिंदु फ बिं-
दूवरच पडेल, कारण बक बाजू ईफ बाजू बरोबर आहे.
बक बाजू ईफ बाजूवर पडली असतां अब आणि अ-
क ह्या डई आणि डफ ह्यांवरच पडतील अब आणि
अक ह्या दोन बाजू डई आणि डफ ह्यांवर पडणार

नाहीत असें मानल्यास या दुसऱ्या तऱ्हेनें पडल्या पाहिजेत. त्या ई ग आणि ग फ रेखांच्या स्थळीं आहेत त्या स्थळीं पडतील असें मानूं. आतां ई फ पायावर आणि त्याचे एकेच अंगास ज्याच्या ड ई आणि ग ई बाजू बरोबर असून पायाचे ई दोकांत समाप्त होतात, व ज्याच्या ड फ आणि ग फ बाजू बरोबर असून फ दोकांत समाप्त होतात, असे दोन त्रिकोण ड ई फ आणि ग ई फ राहूं लागतील, पण अशी गोष्ट होणे अवाक्य, असें मागीलच सिद्धांतांमध्ये सिद्ध केले आहे, त्याकरितां ब क पाया ई फ पायाशीं अगदीं मिळाला असतां अब आणि अक बाजू ड ई आणि ड फ त्या बाजूंवरच पडतील, पडल्यावांचून कदापि राहणार नाहीत. त्याकरितां अबक त्रिकोणाचे तिन्ही कोन ड ई फ त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांवर पडतील, म्हणून ते त्रिकोण परस्पर बरोबर आहेत.

९ सिद्धांत.

सरकरेख कोनाचे दोन भाग समान करावयाचे.

ब अक एक सरकरेख कोन आहे, त्याचे दोन भाग समान करावयाचे. अब रेघेंत ड बिंदु घे, आणि (३ व्या सि० प्र०) अकचा अड एवढा अई तुकडा पाड, ड,

ई सांध, उ ई बाजूवर (१ व्या
सि० प्र०) उफ ई समभुज त्रिको-
ण कर, आणि अ, फ सांध. अफ
रेष उ अ ई कोनाचे दोन समान
भाग करिते.

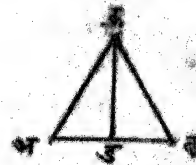


कारण, अउफ आणि अईफ ह्या दोन त्रिकोणांत
अउ बाजू अई बाजू बरोबर आहे, अफ रेष दोहोंस सा-
धारण आहे, आणि उफ बाजू ईफ बाजू बरोबर आहे.
ह्या करिता ते त्रिकोण (१ व्या सि० प्र०) एकरूप आहेत.
म्हणून उ अफ कोन ई अफ कोना बरोबर आहे.

१० सिद्धांत

कोणत्याही सरळ रेषेचे समान दोन भाग कराव-
याचे.

अब एक सरळ रेष आहे, तिचे समान दोन
भाग करावयाचे. (१ व्या
सि० प्र०) अब बाजूवर
अबक समभुज त्रिकोण
कर, आणि (१ व्या सि० प्र०)
अकब कोनाचे कड रेषेने दोन समान भाग कर.



कड रेष अब रेचेचे अड आणि बड हे दोन भाग
समान करते.

अकड आणि बकड ह्या दोन त्रिकोणांत अक
बाजू बक बाजू बरोबर आहे, कड बाजू दोहोंस साधा-
रण आहे, आणि अकड कोन बकड कोना बरोबर आहे,
ह्या करितां हे दोन त्रिकोण (४ व्या सि० प्र०) एकरूप आ-
हेत, म्हणून अड बाजू बड बाजू बरोबर आहे.

११ सिद्धांत.

कोणत्याही सरळ रेषेवर त्या रेषेतील कोणत्याही
बिंदूपासून लंब काढावयाचा.

अब एक सरळ रेष आहे. तीवर तिच्या मधील
क बिंदूपासून लंब काढा
वयाचा आहे.

अक रेषेमध्ये ड



बिंदु घे, आणि कड एवढाबकचा (३ व्या सि० प्र०) कई
जुकडा पाड, आणि (१ व्या सि० प्र०) डई रेषेवर डफ-
ई समभुज त्रिकोण कर, आणि क, फ बिंदु सांध. कफ
रेष अब बाजूवर लंब आहे.

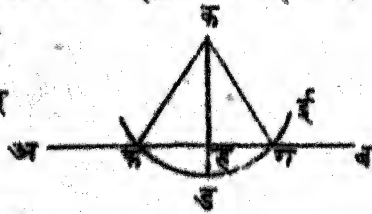
कारण, फडक आणि फईक ह्या दोन त्रिकोणांत

फड बाजू फई बाजू बरोबर आहे, फक रेष दोहोंस साधारण आहे, आणि डुक बाजू कई बाजू बरोबर आहे. ह्या करितां (८ व्या सि. प्र०) फकड कोन फ-कई कोना बरोबर आहे. म्हणून (११ व्या व्या०) ड-कफ आणि फकई हे दोन कोन प्रत्येकी काटकोन आहेत. ह्या करितां फक रेष लंब आहे.

१२ सिद्धांत.

कोणत्याही अमर्याद रेषेवर तिच्या बाहेरील कोण-त्याही बिंदूपासून लंब काढावयाचा.

अब एक अमर्याद रेष आहे, तिचे बाहेर क ए - क बिंदु आहे. त्यास त्या बिंदूपासून अब रेषेवर लंब काढावयाचा.



अब बाजूच्या दुस-या अंगास एक ड बिंदु घे, आणि क मध्य कल्पून कड त्रिज्येने फगई वर्तुळ काढ, (१० व्या सि. प्र०) फग रेषेचे ह स्थळीं दोन समान भाग कर, आणि क, ह सांध. फ, क व क, ग बिंदु सांध. कह रेष अब रेषेवर लंब आहे.

कारण, फहक आणि गहक ह्या दोन त्रिको-
णांत फह बाजूहग बाजू बरोबर आहे, कहरघ दो-
होससाधारण आहे, आणि कंफ बाजू कग बाजू बरो-
बर आहे, कारण त्या त्रिज्या आहेत, म्हणून (८ व्या सि०
प्र०) फहक कोन कहग कोना बरोबर आहे. ह्यास्तव
(११ व्या व्या०) ते कोन काढकोन आहेत. ह्या करितां क-
हरेष लंब आहे.

१३ सिद्धांत.

एक सरळ रेष दुसऱ्या सरळ रेषेस येऊन मिळा-
ली असतां जे तिच्या एके अंगास दोन कोन होतात, ते प्र-
त्येक काढकोन असतात, किंवा ते दोन मिळून दोन काढ-
कोनां बरोबर होतात.

अब रेष डक रेषेस मिळून तिचे एके अंगास
अबड आणि अबक

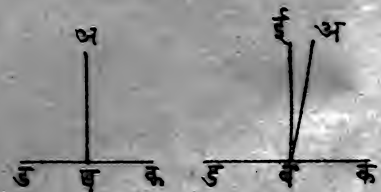
हे दोन कोन करिते, त्यास

त्या कोनां पैकीं प्रत्येक को

न काढकोन असेल, किंवा

ते दोन्ही मिळून दोन काढकोनां बरोबर असतील.

अबड आणि अबक हे दोन कोन परस्पर बरो-



घर असल्यास (११ व्या व्या० प्र०) त्या पैकीं प्रत्येक कोन काटकोन आहे, परंतु अबड कोन अबक कोना बरोबर नसल्यास, व बिंदूतून कड रेषेवर (११ व्या सि० प्र०) बई लंब कर आतां ईबड आणि ईबक हे दोन कोन काटकोन आहेत, कबई कोन अबक आणि अबई ह्या दोन कोनांच्या बेरजे बरोबर आहे. ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पैल्यांत डबई कोन मिळिवला, तेव्हां (२ व्या प्र० प्र०) कबई कोन आणि ईबड कोन मिळून अबक, अबई आणि ईबड ह्या तीन कोनांच्या बेरजे बरोबर आहेत. डबई कोन डबई आणि ईबअ ह्या कोनां बरोबर आहे. ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पैल्यांत अबक कोन मिळीव.

(२ व्या प्र० प्र०) अबड आणि अबक हे दोन कोन मिळून डबई, ईबअ आणि अबक ह्या तीन कोनांच्या बेरजे बरोबर आहेत. हे तीन कोन कबई आणि ईबड ह्या दोन काटकोनां बरोबर आहेत, असें म गेच सिद्ध केले आहे. ह्या करितां (१ व्या प्र० प्र०) अबड आणि अबक हे दोन कोन डबई आणि ईबक ह्या दोन काटकोनां बरोबर आहेत.

दुसरीरीत. डबई, ईवअ आणि अबक त्या
तीन कोनांस अनुक्रमे म, न, क्ष अशीं नांवे ठेऊं. आतां डब-
अ कोन, मन, होईल, आणि ईवक कोन, न क्ष, होईल,
व मनकोन = म + न आणि न क्ष कोन = न + क्ष होईल, म्हणून.

$$\text{मन} + \text{क्ष} = \text{म} + \text{न} + \text{क्ष}$$

$$\text{म} + \text{नक्ष} = \text{म} + \text{न} + \text{क्ष}$$

म + नक्ष आणि म न + क्ष हे कोन म + न + क्ष त्या ती-
न कोनां बरोबर आहेत, त्या करितां ते परस्पर बरोबर
आहेत, म्हणजे.

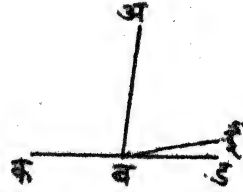
मन + क्ष = म + नक्ष. म, आणि नक्ष
हे दोन कोन काट कोन आहेत.

कु०. प्रत्येक कोनांच्या दोन जोडांमध्ये एका जोडांतील
एक कोन दुसऱ्या जोडांतील एके कोना बरोबर असल्यास
बाकी राहिलेले कोन परस्पर बरोबर असतात.

१४ सिद्धांत.

कोणत्याही सरळ रेषेस तिचे एके बिंदूत दोहों अं-
गांनीं दोन रेषा येऊन मिळाल्या असतां जे दोन कोन हो-
तात, ते दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बरोबर अस-
ल्यास त्या दोन रेषा एकाच सरळ रेषेत असतील.

अब रेघेस ब विंदुंत बक आणि बड रेघा
 मिळून त्या अबक आणि अबड असे दोन कोन करि-
 तात, आणि ते दोन कोन दोन
 काटकोनां बरोबर आहेत.
 त्यास ब क आणि बड ह्या
 दोन रेघा एकाच सरळ रेघे
 त आहेत, हे सिद्ध करावयाचें.



ब क रेघ ज्यासरळ रेघेंत आहे त्यासरळ रेघेंत
 बड रेघ नाही, असें मानल्यास बड रेघ त्या सरळ रेघेंत
 आहे असें मानूं. अब रेघ कबड रेघेस ब विंदुंत मि-
 लून अबक आणि अबड हे दोन कोन करिते, आणि
 हे दोन कोन (१२ व्या सि० प्र०) दोन काटकोनां बरोबर
 आहेत. पण अबक आणि अबड हे दोन कोन दोन काटकोनां बरोबर
 आहेत असें सिद्धवत् गृहीतच आहे, ह्याकरितां अबक
 आणि अबड हे दोन कोन अबक आणि अबड ह्या
 दोन कोनां बरोबर आहेत. अबक हा कोन दोन्ही को-
 नरीच्या पेट्यांस साधारण आहे, ह्याकरितां हा काटकोन
 टाकला असतां (१२ व्या प्र० प्र०) अबड कोन अबड
 कोना बरोबर होईल. पण लहान कोन मोठ्या कोना बरो-
 वर होणें ही गोष्ट अशक्य, ह्याकरितां ज्यासरळ रेघेंत ब-
 क रेघ आहे तींत बड रेघ नाही. ह्यारीतीनें सिद्ध करून

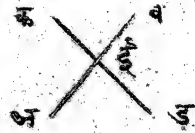
दाखबितां येईल, कीं बड रेघे शिवाय दुसरी कोणतीही
रेघ ब क ज्या रेघेत आहे त्या रेघेत असणार नाही,
म्हणून बड आणि ब क ह्या रेघा एकाच सरळ रेघेत आ-
हेत, हे सिद्ध.

१५ सिद्धांत.

दोन रेघांनीं परस्परांस छेदिंलें असतां जे कोन
पडतात त्या पैकीं समोरासमोरचे कोन परस्पर बरोबर
असतात.

अ ब आणि क ड ह्या दोन रेघा ई स्थळीं छेदि-
तात, त्यास अ ई ड कोन क ई ब कोना बरोबर आहे. व
क ई अ कोन ड ई ब कोना बरोबर आहे, हे सिद्ध करावयाचे.

अ ई रेघ क ड रेघेस
ई स्थळीं मिळते, ह्याकरितां
(१२ व्या सि० प्र०) अ ई क



आणि अ ई ड हे दोन कोन मिळून दोन काठकोनां बरोबर
आहेत. तसेंच अ ब रेघेस ड ई रेघ ई स्थळीं मिळते,
ह्याकरितां अ ई ड आणि ड ई ब हे दोन कोन दोन काठ-
कोनां बरोबर आहेत. म्हणून अ ई क आणि अ ई ड
हे दोन कोन अ ई ड आणि ड ई ब ह्या दोन कोनां बरोबर

धारण आहे, त्या करितां तो त्यांतून काढून राकिला असतां, (३ व्या प्र० प्र०) अर्द्धक कोन दुर्द्धक कोना बरोबर होईल. त्या प्रमाणेंच कर्द्धक कोन अर्द्धदु कोना बरोबर आहे, हें सिद्ध होतें.

१ कु० दोन रेषांनीं परस्परांस छेदिलें असतां त्यांच्या छेदन बिंदूजवळ जे चार कोन पडतात ते सर्व मिळून चार काट कोनां बरोबर असतात.

२ कु० एका बिंदूस कितीही रेषा मिळाल्या असतां त्यांच्या योगानें त्या बिंदूस भोंवतीं जे कोन होतात ते सर्व चार काटकोनां बरोबर असतात.

१६ सिद्धांत.

कोणत्याही त्रिकोणाची एक बाजू वाढविली असतां बाहेर जो कोन होतो तो आंतील पलीकडच्या प्रत्येक कोना पेशां मोगा होतो.

अबक एक त्रिकोण आहे, त्याची बक बाजू दुपर्यंत वाढविली आहे. त्यास बाहेरील अकड कोन आंतील पलीकडच्या कोनां पेशां म्हणजे अबक पेशां आणि बअक पेशां मोगा आहे. अक बाजूने (१० व्या



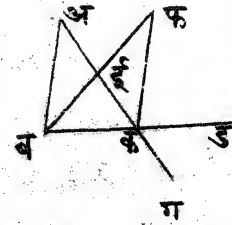
सि० प्र०) ई स्थळीं दोन

समान भाग कर, आणि

ब,ई सांध. बई बाजू फ

पर्यंत वाढीव, अशी कीं ब

ई आणि ईफ परस्पर बरोबर होतील. फ, क सांध आ-
णि अक, ग पर्यंत वाढीव.



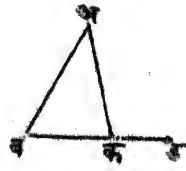
बईअआणिकईफ ह्या दोन त्रिकोणांत बईबा-
जूईफ बाजू बरोबर आहे, अईबाजू ईक बाजू बरो-
बर आहे, आणि अईब अंतरकोन कईफ अंतर कोना-
बरोबर (१५ व्या सि० प्र०) आहे, ह्याकरितां (४ व्या सि०

प्र०) ते दोन त्रिकोण सर्वांशीं एकरूप, म्हणून बई बाजू
समोरील अ कोन बई बाजूच्या बरोबरीची जी फई
बाजू तिच्या समोरच्या फकई कोना बरोबर आहे.

अकफ कोनापेक्षां अकड कोन मोठा आहे, ह्याकरितां
अकफ चे बरोबरीचा जो बअक कोन ह्यापेक्षांही अ-
कड कोन मोठा आहे. बक बाजूचे दोन समान भाग क-
रून वरल्याप्रमाणें कृत्य केलें असतां अबक कोनापेक्षां
बकग कोन किंवा त्याचे बरोबरीचा जो अकड कोन
हा मोठा आहे, हे सिद्ध होईल.

त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांहून कमी असते.

अबक एक त्रिकोण आहे. त्याच्या कोणत्याही दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांपेक्षा कमी आहे, हे सिद्ध करावयाचे.



बक बाजू ड पर्यंत

वाटीव, आतां (१६ व्या सि० प्र०) अकड कोन अ-बक कोनापेक्षा मोठा आहे, त्या दोन्ही कोनांमध्ये अक-ब कोन पर्यायाने मिळीव, तेव्हां अकब आणि अकड हे दोन कोन मिळून अबक आणि अकब या दोन कोनांच्या बेरजे पेक्षा मोठे आहेत, परंतु अकब आणि अकड हे दोन कोन मिळून (१२ व्या सि० प्र०) दोन काटकोन आहेत, त्या करिता अकब आणि अबक या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांपेक्षा कमी आहे. त्याप्रमाणेच अकब आणि कअब या कोनांची बेरीज तशीच अबक आणि बअक यांचीही बेरीज दोन काटकोनांपेक्षा कमी आहे, असे सिद्ध करिता येईल.

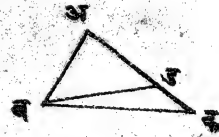


कु० एकाच बिंदू पासून एकाच रेषेवर दोन लंब कदा-
पि होणार नाहीत.

१० सिद्धांत.

त्रिकोणांत मोठे बाजू समोरील कोन लहान बाजू
समोरील कोनापेक्षां मोठा असतो.

अबक एक त्रिकोण आहे; त्याची अक बाजू अ
ब बाजू पेक्षां मोठी आहे.
त्यास अक बाजू समोरील
ब कोन अब बाजू समो-
रील क कोनापेक्षां मोठा
आहे, हे सिद्ध करावयाचे.



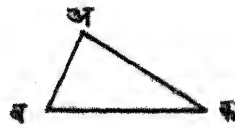
अक बाजू अब बाजू पेक्षां मोठी आहे, म्हणून
(३ व्या सि० प्र०) अब एवढा अक चा अड तुकडा
पाड, आणि ब, ड सांध. अडब कोन बकड त्रिको-
णाचा बाहेरील कोन आहे, त्याकरितां तो (१६ व्या सि०
प्र०) बकड कोनापेक्षां मोठा आहे. अड बाजू अब
बाजू बरोबर आहे, म्हणून (५ व्या सि० प्र०) अ-
डब कोन अबड कोना बरोबर आहे, तेव्हा अबड
कोनही बकड कोनापेक्षां मोठा आहे. पण अबड कोन

१९ सिद्धांत.

त्रिकोणामध्ये महत्तर कोना समोर महत्तर बाजू असते.

अबक एक त्रिकोण आहे, त्याचा अबक कोन अकब कोनापेक्षा मोठा आहे. त्यास अक बाजू

अब बाजूपेक्षा मोठी आहे, हे सिद्ध करावयाचे.



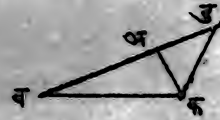
अक, अब पेक्षा मोठी नाही, असे म्हटल्यास अक, अब बरोबर आहे, किंवा अब पेक्षा लहान आहे, असे मानिले पाहिजे. अक, अब बरोबर आहे, असे मानता येत नाही, कारण (५ व्या सि० प्र०) अबक आणि अकब हे दोन कोन बरोबर होऊ लागतील, आणि ते तर बरोबर नाहींत. अक, अब पेक्षा लहान आहे असे ही म्हणता येत नाही, कारण (१० व्या सि० प्र०) अकब कोन अबक पेक्षा मोठा होऊ लागेल, आणि तो तर अबक पेक्षा लहान आहे. याकारिता अक

बाजू अब बाजूपेक्षां मोठी आहे, हें अर्थातच सिद्ध होते.

२० सिद्धांत.

त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्या बाजूपेक्षां मोठी असते.

अबक एक त्रिकोण आहे; त्याच्या कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्या बाजूपेक्षां मोठी आहे. म्हणजे अब आणि बक ह्यांची बेरीज अकपेक्षां मोठी आहे, अक आणि अब ह्यांची बेरीज बकपेक्षां मोठी आहे, आणि अक आणि बक ह्यांची बेरीज अबपेक्षां मोठी आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



बअ ड पर्यंत वाढीव आणि (२-या सि० प्र०) अड, अक बरोबर कर ड, क सांध.

अड अक बरोबर आहे, ह्या करितां अकड कोन (५-या सि० प्र०) अडक कोना बरोबर आहे, परंतु बकड कोन अकड कोनापेक्षां मोठा आहे, म्हणून बकड कोन अकड कोनाच्या बरोबरीना जो अडक कोन त्यापेक्षांही मोठा आहे. बडक त्रिकोणांत बकड कोन बडक कोनापेक्षां मोठा

पेशां मोठी आहे. पण बड बाजू अब आणि अक ह्या दोन बाजूंचे बेरजे बरोबर आहे, कारण अड बाजू अक बाजू बरोबर आहे, म्हणून अब आणि अक ह्या दोन बाजूंची बेरीज बक पेशां मोठी आहे. ह्याप्रमाणेच सिद्ध होईल, कीं अक आणि क बाजू ह्यांची बेरीज अब पेशां मोठी आहे, व अब आणि बक ह्यांची बेरीज अक पेशां मोठी आहे.

२१ सिद्धांत.

त्रिकोणामध्ये एक बिंदु घेऊन तो आणि त्रिकोणाच्या कोणत्याही बाजूची दोबटेंहीं सांधिलीं असतां ज्या दोन रेषा होतान त्यांची बेरीज त्रिकोणाच्या दुसऱ्या दोन बाजूंच्या बेरजेपेशां कमी असते. पण त्या दोन रेषां मधील कोन त्रिकोणाच्या सदरहु दोन बाजूंमधील कोनपेशां मोठा असतो.

अबक एक त्रिकोण आहे. त्यामध्ये ड एक बिंदु आहे. तो बक बाजूची दोबटेंहीं बड आणि कड ह्या दोन रेषांनीं सांधिलीं आहेत. त्यास बड आणि कड ह्या दोन रेषांची बेरीज अब आणि



अक ह्या दोन बाजूंच्या बे-

रजेपेक्षा मोठी आहे, व ब-

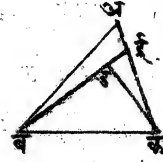
ड आणि कड ह्यांच्या म-

धील कोन बडक हा अब

आणि अक ह्या दोन बाजूंच्या

मधील व अक कोनापेक्षा मोठा आहे, हे सिद्ध करावया

चे. बड बाजूई पर्यंत वाढीव.



(१० व्या सि० प्र०) अबई त्रिकोणाच्या अब

आणि अई ह्या दोन बाजूंची बेरीज बई पेक्षा ज्यास्त

आहे. ह्या दोन्ही पेढ्यांत ईक बाजू मिळीव, तेव्हा अब

आणि अई आणि ईक म्हणजे अक ह्यांची बेरीज बई

आणि ईक ह्यांच्या बेरजेपेक्षा अधिक आहे. (१० व्या सि०

प्र०) ड ईक त्रिकोणाच्या डई आणि ईक ह्या दोन

बाजूंची बेरीज कड बाजू पेक्षा मोठी आहे. बड बाजू

दोन्ही पेढ्यांत मिळीव, आतां कई आणि बड आणि

डई म्हणजे बई ह्यांची बेरीज बड आणि डक ह्यांच्या

बेरजेपेक्षा मोठी आहे. नुकतेंच सिद्ध केले, की अब आणि अ-

क ह्यांची बेरीज बई आणि ईक ह्यांच्या बेरजेपेक्षा

मोठी आहे. ह्यास्तव अब आणि अक ह्यांची बेरीज

बड आणि डक ह्यांच्या बेरजेपेक्षा फारच मोठी आहे.

बाहेरील बर्डक कोन अ कोनापेक्षां मोठा आहे, आणि ह्या सिद्धांता प्रमाणेच डर्डक त्रिकोणाचा बाहेरील बडक कोन बर्डक कोनापेक्षां मोठा आहे. तेव्हा बडक कोन व अक कोनापेक्षां मोठा आहे, हे अर्थातच सिद्ध झाले.

२२ सिद्धांत.

एक त्रिकोण करावयाचा आहे, तो असा की ज्याच्या तीन बाजू विवक्षित तीन रेषां बरोबर होतील. पण विवक्षित तीन रेषां पैकीं कोणत्याही दोन रेषांची बेरीज तिसऱ्या रेषेपेक्षां मोठी असेल.

अ, ब, क, तीन रेषा आहेत, आणि ह्या तीन रेषां पैकीं कोणत्याही दोन रेषांची बेरीज तिसऱ्या रेषेपेक्षां मोठी आहे, म्हणजे अ आणि ब ह्यांची बेरीज क पेक्षां मोठी आहे, ब आणि क ह्यांची बेरीज अ पेक्षां मोठी आहे, व अ आणि क ह्यांची बेरीज ब पेक्षां मोठी आहे. त्यास असा एक त्रिकोण करावयाचा आहे, की त्याच्या तिन्ही बाजू अ, ब, क, ह्या तीन रेषां बरोबर होतील.



डुई एक सरळ रेष काढ.

अ

तिन्वा आरंभ डु बिंदूत आहे,

ब

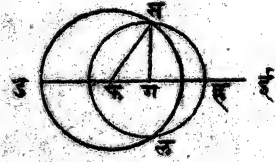
आणि ती उजवे अंगास म्हणजे

क

ई बिंदूकडे अनंत आहे,

असें मान, (१ व्या सि० प्र०)

डुई रेषेचा अ रेषे एवढा



ड फ तुकडा पाड, ब रेषे

एवढा फ ग तुकडा पाड, आणि क रेषे बरोबर ग ह

तुकडा कर, फ मध्य बिंदु कल्पून फ ड निज्येनें ड स -

ल वर्तुळ काढ, ग मध्य बिंदु कल्पून ग ह निज्येनें ल ह -

स वर्तुळ काढ, आणि फ, स आणि स, ग सांध. फ स -

ग त्रिकोणाच्या तीन बाजू अ, ब, क, तीन रेषां बरोबर

आहेत.

कारण, ड स ल वर्तुळाचा फ मध्य बिंदु आहे,

ह्या करितां (१७ व्या व्या० प्र०) फ ड आणि फ स ह्या

रेषा परस्पर बरोबर आहेत, पण फ ड रेषे अ रेषे बरो -

बर केली आहे, ह्या करितां फ स रेषे अ रेषे बरोबर आहे.

फ ग रेषे ब रेषे बरोबर आहेच. सहल वर्तुळाचा ग

मध्य आहे, म्हणून ग ह, ग स बरोबर आहे, आणि ग ह,

क बरोबर केली आहे, ह्यास्तव ग स ही क बरोबर आहे. म्ह

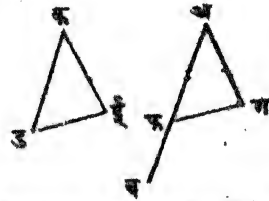
णून फ ग स त्रिकोणाच्या फ स फ ग आणि ग स ह्या तीन बाजू

१) अनुक्रमेण अ, ब, क, ह्या तीन रेषांशीं बरोबर आहेत.

२३ सिद्धांत.

विवक्षित रेषेत विवक्षित बिंदूजवळ विवक्षित कोना एवढा एक कोन करावयाचा.

अ, ब एक रेषा आहे,
तीत अ बिंदूजवळ ड, क -
ई कोना एवढा कोन कराव-
याचा.



कड आणि क ई ह्या रेषांत ड आणि ई बिंदु कर, आणि ड, ई सांध. (२२ व्या सि० प्र०) कड, क ई, आणि ड ई ह्या तीन बाजूं बरोबर ज्याच्या बाजू होतील असा एक अफग त्रिकोण कर. आतां अफ-ग त्रिकोणाची अफ बाजू कड ई त्रिकोणाच्या कड ग-जू बरोबर आहे, अ ग बाजू क ई बाजू बरोबर आहे, आणि फ ग बाजू ड ई बाजू बरोबर आहे, म्हणून अफग आणि कड ई त्रिकोण (२० व्या सि० प्र०) एकरूप आहेत, म्हणून फ अ ग कोन ड क ई कोना बरोबर आहे, ह्या करितां अ, ब रेषेत अ बिंदूजवळ ड क ई कोना एवढा फ अ ग कोन झाला असे.

२४ सिद्धांत.

दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या दोन बाजूं बरोबर असून एका त्रिकोणाच्या दोन बाजूंतील कोन त्या बाजूंच्या बरोबरीच्या दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन बाजूंतील कोनापेक्षां मोठा असेल, तर ज्या त्रिकोणाचा कोन मोठा आहे, त्याची त्या कोना समोरील बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या लहान कोना समोरील बाजूपेक्षां मोठी होईल.

अ ब क आणि ड ई फ असे दोन त्रिकोण आहेत.

अ ब क त्रिकोणाच्या अ ब

आणि अ क ह्या दोन बाजू

ड ई फ त्रिकोणाच्या ड ई

आणि ड फ ह्या दोन बाजूं

बरोबर आहेत, पण अ ब

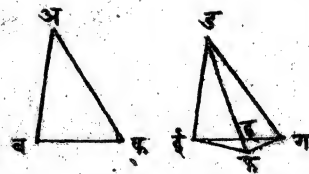
आणि अ क ह्या दोन बाजूंतील ब अ क कोन ड ई फ

त्रिकोणाच्या ड ई आणि ड फ ह्या दोन बाजूंतील ई -

ड फ कोनापेक्षां मोठा आहे. त्यास अ कोना समोरील

ल ब क बाजू, ड कोना समोरील ई फ बाजूपेक्षां

मोठी आहे, हे सिद्ध करावयाचे.



ड ई आणि ड फ ह्या दोन बाजूं पैकीं कोणती तरी एक बाजू दुसरीपेक्षां मोठी नाहीं असें आहे, त्यास ती बाजू ड ई आहे असें मानूं. ड ई बाजूंत ड बिंदू जवळ (२३ व्या सि० प्र०) ब अक कोना बरोबर ई ड ग कोन कर, अक किंवा तिचे बरोबरीची जी बाजू ड फ हिचे बरोबर (३ व्या सि० प्र०) ड ग कर, आणि ई, ग आणि ग, फ बिंदु सांध.

ड ई बाजू ड फ बाजू पेक्षां किंवा तिच्या बरोबरीची जी ड ग बाजू तिच्यापेक्षां मोठी नाहीं, ह्या करितां ड ग ई कोन ड ई ग कोनापेक्षां मोठा नाहीं. पण ड ह ग कोन (१६ व्या सि० प्र०) ड ई ग कोनापेक्षां मोठा आहे, ह्या करितां ड ह ग कोन ड ग ई कोनापेक्षां मोठा आहे, आणि म्हणूनच ड ग किंवा ड फ बाजू ड ह पेक्षां मोठी आहे, ह्या करितां ई ग बाजू ई फ आणि ई ड ह्या दोहों बाजूंच्या मध्येच असली पाहिजे, म्हणजे फ बिंदु ई ग बाजूच्या रगळीं असला पाहिजे.

अबक आणि ड ई ग ह्या दोन त्रिकोणांत अब बाजू ड ई बाजू बरोबर आहे, अक बाजू ड ग बरोबर आहे, आणि अबक अंतरकोन ई ड ग अंतर

कोना बरोबर आहे, ह्या करितां (४ व्या सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत, म्हणून ब क बाजू ई ग बाजू बरोबर आहे. ड फ बाजू ड ग बाजू बरोबर आहे, ह्या करितां (५ व्या सि० प्र०) ड फ ग कोन ड ग फ कोना बरोबर आहे. ड ग फ कोन ई ग फ कोनापेक्षां मोठा आहे, ह्या करितां ड फ ग कोनही ई ग फ कोनापेक्षां मोठा आहे, आणि ई फ ग कोन तर ई ग फ कोनापेक्षां फारच मोठा आहे, म्हणून (१९ व्या सि० प्र०) ई ग बाजू ई फ बाजूपेक्षां मोठी आहे. आतां ई ग बाजू ब क बाजू बरोबर आहे म्हणून ब क बाजू ई क बाजूपेक्षां मोठी आहे हे सिद्ध.

२५ सिद्धांत.

दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या दोन बाजूं बरोबर असून एकाची तिसरी बाजू दुसऱ्याच्या तिसऱ्या बाजूपेक्षां मोठी असेल तर ज्या त्रिकोणाची तिसरी बाजू मोठी आहे, त्या त्रिकोणाच्या त्या बाजू समोरचा कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तिसऱ्या बाजू समोरच्या कोनापेक्षां मोठा होईल.

अबक आणि ड ई फ हे दोन त्रिकोण आहेत,

ड ई फ त्रिकोणाच्या ड ई आणि ड फ ह्या दोन बाजू बरो-
 बर आहेत, पण ब क बाजू
 ई फ बाजूपेक्षा मोठी आहे,
 त्यास ब क बाजू समोरील
 अ कोन ई फ बाजू सनोर -



च्या ड कोनापेक्षा मोठा होईल, हे सिद्ध करावयाचे.

ब अ क कोन ई ड फ कोनापेक्षा मोठा नाही,
 असे म्हटल्यास ब अ क कोन ई ड फ कोना बरोबर
 आहे, किंवा त्यापेक्षा लहान आहे असे मानले पाहिजे.
 ब अ क कोन ई ड फ कोना बरोबर म्हणता येत नाही,
 बरोबर आहे असे म्हटल्यास (४ व्या सि० प्र०)
 ब क बाजू ई फ बाजू बरोबर होऊ लागेल. ब अ -
 क कोन ई ड फ कोनापेक्षा लहान आहे, असेही म्हण-
 ता येत नाही, कारण, (१३ व्या सि० प्र०) ब क
 ई फ बाजूपेक्षा लहान होऊ लागेल. ह्या करिता ब अ -
 क कोन ई ड फ कोनापेक्षा निःसंशय मोठा आहे.

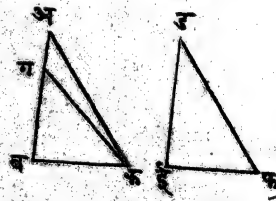


२६ सिद्धांत.

एका त्रिकोणाचे दोन कोन व त्यांच्या मधील बाजू किंवा त्यांपैकी एका कोना समोरील बाजू ही दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन कोन आणि त्यांच्या मधील बाजू किंवा त्यांपैकी, पहिल्या त्रिकोणांत जो कोन घेतला आहे तदनुसार कोना समोरील बाजू यांशी बरोबर असल्यास ते दोन त्रिकोण सर्वांशी सारखे असतात.

अबक आणि डईफ असे दोन त्रिकोण आहेत. अबक त्रिकोणाचे अबक आणि अकव हे दोन कोन डईफ त्रिकोणाच्या डईफ आणि डफई या कोनां बरोबर आहेत, व अबक त्रिकोणाची बक बाजू डईफ त्रिकोणाच्या

ईफ बाजू बरोबर आहे.
(आतां बरोबरीच्या कोनांच्या मधल्या बक आणि ईफ ह्या बाजू प्रथमतः ध-

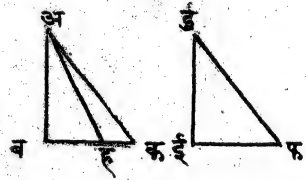


रिल्या आहेत.) त्यास अब आणि अक ह्या दोन बाजू डई आणि डफ ह्या दोन बाजू बरोबर आहेत, व अबक कोन ईडफ कोना बरोबर आहे, हे सिद्ध करावयाचे.

अब, डई बरोबर नसल्यास त्यां पैकीं कोण
 ती तरी एक बाजू दुसऱ्या बाजूपेक्षां मोठी असली पा-
 हिजे. अब बाजू डई बाजूपेक्षां मोठी आहे असें मानूं.
 ब ग, डई बरोबर कर, आणि क, ग सांध. ग ब क
 त्रिकोणाच्या ग ब आणि ब क ह्या दोन बाजू आणि ग-
 ब क अंतर कोन डई फ त्रिकोणाच्या डई आणि डई-
 फ ह्या दोन बाजू व डई फ अंतर कोन ह्यांशी अनु-
 क्रमें बरोबर आहेत, ह्या करितां (४ व्या सि० प्र०)
 अब क आणि डई फ हे दोन त्रिकोण सर्वांशीं एकरूप-
 प म्हणून ग क ब कोन ड फ ई कोना बरोबर आहे.
 पण अ क ब कोन ड फ ई कोना बरोबर आहे, असें
 गृहीत आहे, ह्या करितां ग क ब कोन अ क ब कोना
 बरोबर आहे. पण लहान कोन मोठ्या कोना बरोबर हो-
 नें हें अशक्य, ह्या करितां अब, डईशीं असमान आ-
 हे असें नाहीं, तर समानच आहे. आतां अब क त्रि-
 कोणाच्या अब आणि ब क ह्या दोन बाजू व अब क
 अंतर कोन डई फ त्रिकोणाच्या डई आणि डई फ
 ह्या दोन बाजू व त्यांच्या मधील डई फ अंतर कोन
 ह्यांशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत, ह्या करितां (४ व्या सि०
 प्र०) ते दोन त्रिकोण एकरूप म्हणून अ क बाजू

ड फ बाजू बरोबर व ब अ क तिसरा कोन ई ड फ
तिसऱ्या कोना बरोबर आहे.

आतां क कोना समोरील अब बाजू क च्या
बरोबरीचा जो फ कोन
ह्याच्या समोरील ड ई बा-
जू बरोबर आहे, असें मावूं.
अ क आणि ब क ह्या बा-
जू व ब अ क कोन, ड
फ आणि ई फ ह्या बाजू व ई ड फ कोन ह्यांशीं बरोबर
आहेत, हे सिद्ध करावयाचे.



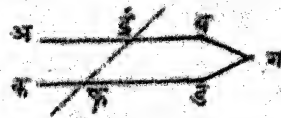
ब क बाजू ई फ बरोबर नसेल, तर ब क, ई फ
पेक्षां मोठी आहे असें मावूं. बह, ई फ बरोबर कर,
आणि अ ह सांध. बह अ त्रिकोणाच्या बह आणि
अ ब ह्या दोन बाजू व अ ब ह अंतर कोन ड ई फ
त्रिकोणाच्या ई फ आणि ई ड ह्या दोन बाजू व ड ई फ
अंतर कोन ह्यांशीं बरोबर आहेत, ह्या करितां ते दोन त्रि-
कोण एकरूप, म्हणून बह अ कोन ई फ ड कोना बरो-
बर होय. ब क अ कोन ई फ ड कोना बरोबर आहे,
असें गृहीतच आहे, ह्या करितां बह अ कोन ब क अ
कोना बरोबर आहे, म्हणजे अ ह क त्रिकोणाचा बाहे-

०१११ कोन आंतील पलीकडचे कोना बरोबर आहे, प-
णही गोष्ट होणे अशक्य, सा करितां ब क बाजू ई फ बा-
जूचीं असमान आहे असें नाही, तर समानच आहे. अब-
क त्रिकोणाच्या अब आणि ब क या दोन बाजू व अ-
ब क अंतरकोन ड ई फ त्रिकोणाच्या ड ई आणि ई फ
या दोन बाजू व ड ई फ अंतरकोन त्यांचीं अनुक्रमे
बरोबर आहेत, सा करितां (४ थ्या सि० प्र०) हे दोन
त्रिकोण सर्वांशीं एकरूप, म्हणून अ क बाजू ड फ
बाजू बरोबर आहे, व व अ क कोन ई ड फ कोना
बरोबर आहे.

२७ सिद्धांत.

दोन रेषांस एक रेष छेदून व्युत्क्रम कोन बरोबर
करीत असल्यास त्या दोन रेषा परस्परसंगीं समानतर आ-
हेत.

अब आणि कड अशा दोन रेषा आहेत, त्यांस
ई फ रेष छेदून अ ई फ
आणि ई फ ड हे दोन व्युत्क्र-
मकोन परस्पर बरोबर करीत.
त्यास अब आणि कड या



ह्या दोन रेखासमांतर आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

अब आणि कड ह्या दोन रेखा समांतर नाहीत असें म्हटल्यास, त्या रेखापुर्वेपणीं वाढविल्या असतां कोणत्या तरी अंगास मिळाल्या चाहिजेत. तर ह्या रेखा उजव्या अंगास म्हणजे ब आणि ड ह्या बिंदूंच्या अंगांस ग बिंदूंत मिळतात असें मानूं. आतां फ ग ई हा त्रिकोण होईल, आणि (१६ व्या सि० प्र०) त्याचा बाहेरचा अ-ई फ कोन ई फ ग कोनापेक्षां मोठा होईल. पण अ ई फ कोन ई फ ग कोना बरोबर आहे असें गृहीत आहे, ह्या करितां अ ई फ कोन ई फ ग कोनापेक्षां मोठा होणें हें अशक्य होय, म्हणून अब आणि कड ह्या दोन बाजू उजव्या अंगास मिळत नाहीत हें स्पष्ट आहे. ह्याप्रमाणेच ह्या डाव्या अंगासही मिळत नाहीत असें सिद्ध होते. ज्या दोन रेखा दोहों अंगांस कितीही वाढविल्या असतां परस्पर मिळत नाहीत त्या रेखा समांतर आहेत. असें ३४ व्या व्याख्येमध्ये आहे, ह्या करितां अब आणि कड ह्या दोन रेखा समांतर आहेत.

२८ सिद्धांत.

एका रेघेनें दोन रेघांस छेदलें असतां जर बाह्य कोन, छेदक रेघेच्या ज्या अंगास तो कोन आहे त्याच आंगच्या पलीकडील अंतरकोना बरोबर होत आहे, किंवा जर दोही अंतरकोनांची बेरीज दोन काटकोनां बरोबर होत आहे, तर त्या दोन रेघा परस्परांशीं समांतर आहेत.

ई फ रेघ, अ व आणि क ड ह्या दोन रेघांस छेदून ई ग ब बाह्य कोन पलीकडच्या ग ह ड अंतर कोनाशीं बरोबर करते, किं-

वा ब ग ह आणि ग ह ड
ह्या दोन्ही अंतरकोनांची बे-
रीज दोन काटकोनां बरो-
बर करते, असें मानल्यास



अ व आणि क ड ह्या दोन रेघा समांतर आहेत, हें सि-
द्ध करावयाचें.

ई ग ब कोन ई ह ड कोना बरोबर आहे, हें
गृहीत आहे, आणि (१५ व्या सि० प्र०) ई ग ब
कोन अ ग ह कोना बरोबर आहे, ह्या करितां अ ग ह

कोन गहड कोना बरोबर आहे. पण हे व्युत्क्रमकोन आहेत ह्या करितां (२७ व्या सि० प्र०) अब आणि कड ह्या दोन रेखासमांतर आहेत.

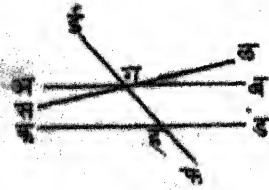
बगह आणि गहड हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बरोबर आहेत, असें गृहीत आहे, आणि (१३ व्या सि० प्र०) अगह कोन आणि बगह कोन ह्यांची बेरीज दोन काटकोनां बरोबर आहे, म्हणून अगह आणि बगह हे दोन कोन बगह आणि गहड ह्यां दोन कोनां बरोबर आहेत. दोन्ही पैक्यांस बगह कोन साधारण आहे, तो काढून टाकला असतां बाकीचा अगह कोन बाकीच्या गहड कोना बरोबर होईल. पण अगह आणि गहड हे व्युत्क्रमकोन आहेत, ह्या करितां अब बाजू कड बाजूशीं समांतर आहे.

२९ सिद्धांत.

एका रेषेनें दोन समांतर रेखांस छेदलें असतां व्युत्क्रमकोन बरोबर होतात, बाह्य कोन छेदक रेषेच्या ज्या अंगास तो असतो, त्याच आंगाच्या पलीकडच्या अंतरकोना बरोबर होतो, आणि छेदक रेषेच्या एका आं-

गज्या दोन अंतर्कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बरोबर होते.

अब आणि कड ह्या दोन समांतर रेषांस ई फ रेष छेदते, त्यास अ ग ह आणि ग ह ड हे दोन व्युत्क्रम कोन बरोबर आहेत, ई ग व बाह्य कोन ई फ छेदक रेषेच्या उजव्या आंगाच्या पळीकडील ग ह ड अंतर्कोना बरोबर आहे, आणि एके आंगचे बगह आणि ग ह ड हे दोन अंतर्कोन, दोन काटकोनां बरोबर आहेत, हे सिद्ध करावयाचे.



अ ग ह कोन ग ह ड कोना बरोबर नाही, असे म्हटल्यास ग ह ड कोना बरोबर स ग ह कोन करणारी अशी एक सल रेष ग बिंदूतून काढू. तेव्हा (२७-वे सि० प्र०) सल रेष कड रेषेची समांतर आहे, पण अब रेष कड रेषेची समांतर आहे असे गृहीत आहे. ह्या करितां परस्परांची नजमणाऱ्या अशा दोन रेषा एकाच ग बिंदूतून कड रेषेची समांतर काढल्या असें झाले. पण ही गोष्ट अशक्य असे ११ वे प्र-

त्यक्ष प्रमाण आहे, ह्या करितां गहड कोन आणि अ-
गहड कोन परस्परांशीं बरोबर नाहीत, असें म्हणतां येत
नाहीं, म्हणून ते परस्परांशीं अर्थातच बरोबर आहेत.
(१५ व्या सि० प्र०) अगहड कोन ईगब कोना बरो-
बर आहे, आणि अगहड कोन गहड कोना बरोबर
आहे असें आतां सिद्ध केलें, ह्या करितां ईगब कोन ग-
हड कोना बरोबर आहे. ह्या दोन्ही कोनांत बगहड को-
न मिळीव, तेव्हां ईगब आणि बगहड हे कोन बग-
हड आणि गहड ह्या दोन कोनां बरोबर आहेत, पण
(१३ व्या सि० प्र०) ईगब आणि बगहड ह्या दोन
कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बरोबर आहे, ह्या करि-
तां बगहड आणि गहड ह्या दोन अंशकोनांची बेरीज
दोन काटकोनां बरोबर आहे, हें स्पष्ट आहे.

कु० सल आणि कड ह्या दोन रेषांमुळे ईफ रेषे-
शीं जे सगहड आणि गहड हे दोन कोन होतात, ते
दोन काटकोनांपेक्षां कमी असल्यास ह्या कोनांच्या अं-
गास कड आणि सल रेषा पुरतेपणीं वाढविल्या अ-
सतां मिळतील.

ह्या आंगास सल आणि कड ह्या दोन रेषा मि-
ळणार नाहीत असें म्हटल्यास, त्या समांतर आहेत किंवा

ई फ रेघेच्या उजव्या अंगास मिळतात, असें मानणें
 अवश्य आहे. त्या समांतर आहेत असें म्हणतां येत
 नाहीं, कारण सगह आणि गहक हे दोन कोन मि-
 कून दोन काटकोनां बरोबर होऊं लागतील. सल
 आणि कड त्या दोन रेघा उजव्या अंगासही मिळत
 नाहीत, कारण मिळतील असें म्हटल्यास ल गह जा-
 णि गहड हे कोन त्रिकोणातील होईल असें लागतील, आणि ते दोन का-
 ट कोनांपेक्षांही कमी होईल लागतील, पण ते दोन काट-
 कोनांपेक्षां कमी होणें अशक्य आहे, कारण सगह,
 हगल, गहक, आणि गहड हे चार कोन मि-
 कून चार काटकोनां बरोबर आहेत, आणि ह्यांपैकीं
 सगह आणि गहक हे दोन कोन दोन काटकोनां
 पेक्षां कमी आहेत असें मुळींच गृहीत आहे. ह्या करि-
 तां हगल आणि गहड हे दोन कोन दोन काटको-
 नांपेक्षां मोठे आहेत हें स्पष्टच आहे, ह्यास्तव सल
 आणि कड रेघा ई फ च्या उजव्या अंगास मिळणार
 नाहीत, आणि पूर्वी सिद्ध केले आहेत कीं त्या रेघा समां-
 तर नाहीत, ह्याकरितां सल आणि कड ह्या रेघा ई-
 फ बाजूच्या डाव्या अंगास वाढविल्या असतां मिळ-
 तीलच मिळतील.

३० सिद्धांत.

ज्या रेखा दुसरे एके रेघेशीं समांतर असता-
त त्या परस्पर समांतर असतात.

अब आणि कड ह्या दोन रेखा ईफ रेघेशीं
समांतर आहेत, त्यास अ-
ब रेघ कड रेघेशीं समा-
ंतर आहे, हें सिद्ध करावया-
चें.



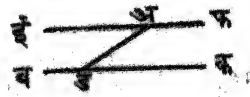
अब, ईफ, आ -

णि कड ह्या तीन रेखांस छेदून जाणारी अशी एक
गहस रेघ काढ. (२९ व्या सि० प्र०) अ गह कोन
गहफ कोना बरोबर आहे, आणि ईफ आणि कड
ह्या दोन रेखांस गहस रेघ छेदिते, ह्या करितां ग-
ह फ बाह्य कोन हसड कोना बरोबर आहे, आणि
नुकतेच सिद्ध केले कीं, अ गह कोन गहफ कोना
बरोबर आहे, ह्या करितां अ गह कोन हसड को-
ना बरोबर आहे. आतां हे कोन व्युत्क्रम आहेत, ह्या
करितां (२७ व्या सि० प्र०) अब आणि कड
ह्या रेखा समांतर आहेत.

३१ सिद्धांत.

विवक्षित बिंदूतून विवक्षित रेषेचीं समांतर अशी एक रेष काढावयाची.

अ एक बिंदू आहे व ब क एक रेष आहे, त्यास अ बिंदूतून ब क चीं समांतर अशी एक रेष काढावयाची.



ब क रेषेत एक ड

बिंदू घे, आणि अ, ड सांध. अ ड रेषेत अ बिंदूजवळ (२७ व्या सि० प्र०) अ ड क कोना बरोबर ई अ ड कोन कर, आणि ई अ, फ पर्यंत वाढीव.

ई फ आणि ब क ह्या दोन रेषांस अ ड रेष मिळून ई अ ड आणि अ ड क असे दोन कोन करिते. ते कोन परस्परांचीं बरोबर आहेत, आणि ते व्युक्रम आहेत, ह्याकरिता (२७ व्या सि० प्र०) ई फ रेष ब क रेषेचीं समांतर आहे, तेव्हा ई फ रेष अ बिंदूतून ब क चीं समांतर केली.

३२ सिद्धांत.

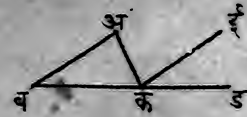
त्रिकोणाची कोणतीही बाजू बाहेर वाढविली असतां बाहेरच्या अंगास जो कोन होतो तो आंतील पलीकडच्या दोन कोनांच्या बेरजे बरोबर असतो, आणि त्रिकोणाच्या आंतील तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर असते.

अबक एक त्रिकोण आहे, त्याची बक बाजू दु पर्यंत वाढविली आहे,

त्यास बाहेरील अकड कोन आंतील पलीकडच्या

अबक आणि बअक

ह्या दोन कोनांच्या बेरजे बरोबर आहे, आणि अबक, बअक, आणि बक अ ह्या आंतील तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, हे सिद्ध करावयाचे.



(३१ व्या सि० प्र०) क बिंदूतून अब रेघेची कई समांतर रेघ काढ. अब आणि कई ह्या दोन समांतर रेखांस अक रेघ मिळते, त्यास (२९ व्या सि० प्र०) बअक आणि अकई हे दोन कोन बरोबर

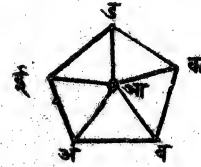
आहेत. त्याच दोन रेषांस बड रेष छेदिते, त्या करितां बाहेरील ईकड कोन अबक कोना बरोबर आहे, परंतु अकई कोन बअक कोना बरोबर आहे. हे आतांच दाखविलें, त्या करितां सगळा बाहेरील कोन अकड आंतील पलीकडील अबक आणि बअक ह्या दोन कोनांच्या बेरजे बरोबर आहे. ह्या दोन्ही पेट्यांत अकब कोन मिळीव, तेव्हां अकड आणि अकब हे दोन कोन मिळून अ, ब, आणि अकब ह्या तीन कोनां बरोबर आहेत, पण अकड आणि अकब ह्या दोन कोनांची बेरीज (१२ व्या सि० त्र०) दोन काटकोनां बरोबर आहे, ह्या सब त्यांचे बरोबरीचे जे आंतील तीन कोन त्यांची बेरीज ही दोन काटकोनां बरोबर आहे.

पहिली कुरलरी कोणत्याही सरल रेषाकृतीच्या आंतील सर्व कोनांत चार काटकोन मिळविले असतां त्यांची बेरीज त्या आकृतीचे बाजूंच्या संख्येच्या दुप्पट काटकोनां बरोबर होते.

अबकडई एक सरल रेषाकृती आहे. तर हिच्या मध्ये ओ बिंदू घेऊन त्यापासून त्या आकृतीच्या कोनांपर्यंत रेषा काढल्या असतां जितक्या त्या

आकृतीस बाजू आहेत तितके त्रिकोण पडतील, हे स्पष्ट आहे. त्या आकृतींत जे

काय त्रिकोण पडतील त्या सर्वांच्या कोनांची बेरीज मागील सिद्धांतावरून त्या त्रिकोणांच्या संख्येच्या दुप्पट काटकोनां बरोबर आहे, म्हणजे त्या आकृतीस जितक्या बाजू आहेत, त्यांच्या संख्येच्या दुप्पट काटकोनां बरोबर आहे. आतां त्रिकोणांचे सर्व कोन, त्या आकृतीतील सर्वकोन व ओ बिंदूजवळ जे काय कोन झाले आहेत ते ह्यांच्या बेरजे बरोबर आहेत. (१५ सि० २ कु० प्र०) ओ बिंदूजवळच्या सर्व कोनांची बेरीज चार काटकोनां बरोबर आहे, ह्याकरितां सर्व त्रिकोणांच्या कोनांची बेरीज आकृतीतील कोन व चार काटकोन ह्यांच्या बेरजे बरोबर आहे, परंतु ते सर्वकोन आकृतीच्या बाजूंच्या संख्येच्या दुप्पट काटकोनां बरोबर आहेत, असे सिद्ध केलेच आहे, ह्याकरितां आकृतीच्या आतील कोनांचे चार काटकोन मिळविले असता ती बेरीज त्या आकृतीच्या बाजूंच्या संख्येच्या दुप्पट काटकोनां बरोबर होते.



दुसरी कुरळरी, कोणत्याही सरळ रेषाकृतीचे

बाहेरील सर्वकोनांची बेरीज चार काटकोनांबरोबर असते.

(१३ व्या सि० प्र०) प्रत्येक आंतील कोन

व त्याचे जवळचा बाहेरील कोन त्यांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, यावरून स्पष्ट आहे, की आकृती-



च्या आंतील व बाहेरील कोनांची बेरीज त्या आकृतीत जितक्या बाजू आहेत त्यांच्या संख्येच्या दुप्पट काटकोनां इतकी आहे. मागल्या कुरलरीत सिद्ध केले, की आकृतीच्या आंतील कोनांत चार काटकोन मिळविले असता ती बेरीज आकृतीच्या बाजूंच्या संख्येच्या दुप्पट काटकोनांबरोबर होते, याकरिता बाहेरील कोन व आंतील कोन त्यांची बेरीज आंतील कोन व चार काटकोन त्यांचे बेरजे बरोबर आहे, यावरून बाहेरील कोन चार काटकोनांबरोबर आहेत हे सिद्ध.

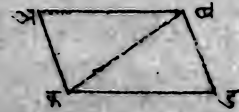
तिसरी कुरलरी. एका त्रिकोणांतील दोन कोनांची बेरीज दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन कोनांच्या बेरजे बरोबर असल्यास त्या दोन्ही त्रिकोणांमध्ये तिसरे कोन बरोबर असतात.

चवथी कुरलरी. काटकोन त्रिकीणांत जे दोन
तिर्यककोन असतात त्यांची बेरीज एका काटकोना-
बरोबर असते.

३२ सिद्धांत.

समांतर व समान अशा दोन रेषांची एकेका
आंगचीं टोके सांधणाऱ्या ज्या रेषा असतात त्याही
समांतर व समान असतात.

अब आणि कड ह्या दोन रेषा समांतर आणि
समान आहेत. त्यास त्यां-
च्या एकेका आंगचीं टोके
सांधणाऱ्या ज्या रेषा अ-
क आणि बड ह्याही स-
मांतर आणि समान आहेत, हें सिद्ध करावयाचें. ब,
क सांध.



अब आणि कड ह्या दोन समांतर रेषांस
बक रेषा सांधते, ह्याकरितां (२९ व्या सि० प्र०)
अबक युल्लमकोन बकड युल्लमकोनाबरो-
बर आहे, अब बाजू कड बाजूबरोबर आहे, आ-
णि बक, अबक आणि बकड ह्या दोन त्रिकोणांस

साधारण आहे, ह्या करितां अबक त्रिकोणाच्या
अब आणि बक ह्या दोन बाजू बकड त्रिको-
णाच्या कड आणि बक ह्या दोन बाजूंशी अनुक्रमे
बरोबर आहेत, आणि अबक अंतरकोन बकड अंतर
कोना बरोबर आहे, ह्या करितां (४ व्या सि० प्र०) अक बाजू बड
बाजू बरोबर आहे, आणि अब बाजू समोरच्या जो
अक ब कोन हा अबच्या बरोवरीची जी कड
बाजू हिच्या समोरच्या कड कोना बरोबर आहे.
बड आणि अक ह्या दोन रेषांस बक रेषा मिळून
अक ब आणि कड हे व्युत्क्रमकोन बरोबर क-
रिते, ह्या करितां (२७ व्या सि० प्र०) अक, बड-
शीं समांतर आहे, आणि अक, बड बरोबर आहे,
हे आतांच सिद्ध केले.

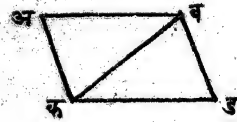
पहिली कुरलरी. एका सरळ रेषेवर एका अं-
गास दोन सारखे लंब काढले असता त्या लंबांची शिरे
सांधणारी रेषा जीवर लंब काढले आहेत तिचीं समां-
तर होईल, आणि दोन लंबांत जो तिचा भाग सांपडला
आहे त्याचीं बरोबर होईल, कारण ते लंब बरोबर आ-
हेत, आणि (२८ व्या सि० प्र०) समांतर आहेत, ह्या
करितां त्यांचीं दोवटे सांधणाऱ्या रेषा समांतर व बरो-

बर आहेत, हे सिद्धच आहे.

३४ सिद्धांत.

समांतरभुज चौकानांत समोरासमोरच्या बाजू व समोरासमोरचे कोन परस्पर बरोबर असतात, आणि कर्ण त्याचे दोन समान भाग करितो.

अकडब एक समांतरभुज चौकोन आहे, आणि त्याचा कर्ण कब आहे, त्यास ह्या समांतरभुज चौकोनाच्या समोरासमोरच्या बाजू व कोन बरोबर आहेत, व कब कर्ण त्याचे दोन भाग समान करतो, हे सिद्ध करावयाचे.



अब बाजू कड बाजूशीं समांतर आहे, आणि त्यांस बक बाजू मिळते, ह्या करितां (२९ व्या सि० प्र०) अबक आणि बकड हे युक्तम कोन बरोबर आहेत, तसेंच अक आणि कड ह्या बाजू समांतर आहेत, आणि त्यांस बक मिळते, ह्या करितां अकब कोन कडड कोनाबरोबर आहे. अबक त्रिकोणाचे अबक आणि बकअ हे दोन कोन अनुक्रमे

डुबक त्रिकोणाच्या बकड आणि कबड ह्या दोन कोनाबरोबर आहेत, व बक बाजू दोहों त्रिकोणास साधारण आहे, आणि ती समान कोनांच्या मधली बाजू आहे, ह्याकरितां (२६ व्या सि० प्र०) ते दोन त्रिकोण एकरूप, म्हणून अब, कडु, बाजू बरोबर आहे, अक बाजू वडु बाजू बरोबर आहे, व बअक कोन वडुक कोनाबरोबर आहे. आतां अबक कोन बकड कोनाबरोबर आहे, आणि डुबक कोन अकब कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां सगळ्या अबडु कोन सगळ्या अकडु कोनाबरोबर आहे. बअक कोन वडुक कोनाबरोबर आहे हे अनुकतेच सिद्ध केले, ह्याकरितां अबकड समांतरभुज चौकोनाचे समोरासमोरचे कोन व बाजू परस्परबरोबर आहेत; व कर्ण त्याचे दोन भाग समान करितो, कारण अबक आणि बकड हे दोन त्रिकोण सर्वांदां परस्परबरोबर आहेत.

पहिली कुरलरी. समांतर रेषांच्या मधील अंतर सारखें असतें. समांतर रेषांपैकीं एके रेषेंत दोन बिंदु घेऊन त्यांतून दोन लंब त्या रेषेवर काढून दुसऱ्या रेषेस मिळे तोपर्यंत वाढीव. ते लंब (२७ व्या सि० प्र०) समांतर आहेत, व लंबांमध्ये जे रेषांचे भाग सांपडले

आहेत, ते परस्परांशीं समांतर आहेत, त्या करितां हा एक समांतर भुज चौकोन जमला, आणि ह्या समांतर भुज चौकोनांत लंब समोरासमोर आहेत, ह्या करितां ते सरस्पर बरोबर आहेत.

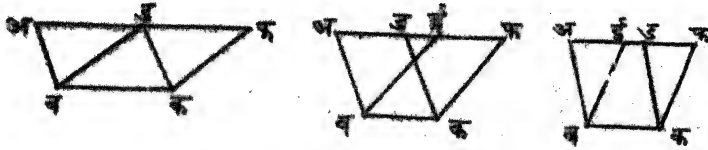
दुसरी कुरलरी. वरच्या कुरलरी वरून सिद्ध होते, कीं समांतर रेषांच्या जोडांत जे त्रिकोण व चौकोन असतात ते सारख्या उंचीचे असतात, व ज्या त्रिकोणांची व समांतर भुज चौकोनांची उंची सारखी असते व ज्यांचे पाये एकाच रेषेंत असून तिचे एकेच अंगास असतात ते समांतर रेषांच्या जोडांत असतात.

३५ सिद्धांत.

एकाच पायावर आणि समांतर रेषांचे एकाच जोडांत जे समांतर भुज चौकोन असतात ते परस्पर क्षेत्रफळानें बरोबर असतात.

अबकड आणि ईबकफ (दुसरी आणि तिसरी आकृति पाहा.) हे दोन समांतर भुज चौकोन बक पायावर आहेत, आणि अफ आणि बक ह्या दोन समांतर रेषांचे जोडांत आहेत, त्यास अबकड समांतर भुज चौकोन ईबकफ समांतर भुज चौकोनाबरोबर

११ आहे हे सिद्ध करावयाचे.



(पहिली आकृति पाहा.) अबकड आणि डबकफ ह्या दोन समांतरभुज चौकोनांच्या बक पायासमोरील ज्या अड आणि डफ बाजू ह्या ड बिंदूत समाप्त होत असल्यास (१४ व्या सि० प्र०) बक समांतरभुज चौकोन डबक त्रिकोणाच्या दुप्पट आहे हे स्पष्टच आहे, आणि ह्या करिता ते परस्परांशीं बरोबर आहेत.

परंतु (दुसऱ्या आकृतीत) अबकड आणि ईबकफ ह्या दोन समांतरभुज चौकोनांच्या बक पायासमोरील अड आणि ईफ ह्या बाजू एकाच बिंदूत समाप्त होत नाहीत त्यापक्षां विचार. अबकड समांतरभुज चौकोन आहे, ह्याकरितां अड बाजू बक बाजू बरोबर आहे, व ईबकफ समांतरभुज चौकोन आहे, ह्याकरितां ईफ, बक बरोबर आहे, ह्याकरितां (१ व्या प्र० प्र०) अड, ईफ बरोबर आहे, आतां डई रेषा

दुसऱ्या आकृतींत अड आणि ई फ ह्यांत निळ -
 विली असतां आणि तिसऱ्या आकृतींत ती अड आणि
 ई फ ह्यांत वजा केली असतां) अई, डफ बरोबर होते.
 अब, डक बरोबर आहे, हास्तव अई आणि अबहा
 दोन बाजू डफ आणि डक ह्या दोन बाजूं बरोबर आहे-
 त, आणि फडक बाह्य कोन (२९ व्या सि० प्र०) आं-
 तील ई अब अंतर्कोना बरोबर आहे, हास्तव (४ व्या
 सि० प्र०) ई अब त्रिकोण फडक त्रिकोणा बरोबर
 आहे. अब क फ ह्या त्रापिज्यमांतून फडक त्रिकोण
 काढून टाकिला असतां कल्याच त्रापिज्यमांतून ई अब
 त्रिकोण काढून टाकिला असतां ज्या वाक्या राहातील
 त्या (३ व्या प्र० प्र०) परस्पर बरोबर होतील, म्हणजे
 अब क ड समांतर भुज चौकोन ई ब क फ समांतर -
 भुज चौकोना बरोबर आहे.

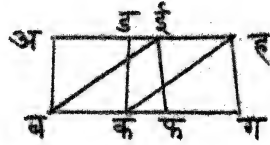
३६ सिद्धांत.

समांतर प्रायांबर आणि एकेच समांतर रेषांचे जो-
 डांव जे समांतर भुज चौकोन असतात ते परस्पर समान
 असतात.

अब क ड आणि ई फ ग ह हे दोन समांतर

भुज चौकोन ब क आणि फ ग ह्या दोन समान पायां-
वर आणि अ ह आणि ब.

ग ह्या दोन समांतर रेषांचे
जोडांत आहेत, त्यास ते पर-
स्पर बरोबर आहेत, हे सिद्ध



करावयाचे. ब, ई आणि क, ह बिंदु सांध.

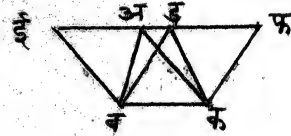
ब क बाजू फ ग बाजू बरोबर आहे, आणि
(३४ व्या सि० प्र०) फ ग, ई ह बरोबर आहे, त्या क-
रितां ब क, ई ह बरोबर आहे, आणि ह्या रेषा समांतर
ही आहेत, ह्या करितां त्यांचीं दोवटें सांधणाऱ्या ज्या रे-
षा ब, ई आणि क, ह ह्याही (३३ व्या सि० प्र०)
परस्परगतीं समांतर ब बरोबर आहेत, ह्या करितां ब-
क, ह, ई हा समांतरभुज चौकोन झाला. (३५ व्या सि०
प्र०) ई ब क ह समांतरभुज चौकोन अब क ड
समांतरभुज चौकोनाशीं बरोबर आहे, कारण ते
ब क पायावर आणि ब ग, अ ह ह्या समांतर रेषांचे
जोडांत आहेत. ई ब क ह समांतरभुज चौकोन
ई फ ग ह बरोबर आहे, कारण ते दोन्ही चौकोन
ई ह पायावर आणि ई ह आणि ब ग ह्या दोन
समांतर रेषांचे जोडांत आहेत, ह्यास्तव (१ व्या प्र०

प्र०) अबकड आणि ई फ ग ह हे समांतरभुज चौकोन परस्पर बरोबर आहेत.

३७ सिद्धांत.

एकाच पायावर आणि समांतररेषांचे एकाच जोडांत जे त्रिकोण असतात ते परस्पर बरोबर असतात.

ब क पायावर आणि ब क आणि अ ड ह्या दोन समांतर रेषांचे जोडांत अबक आणि डबक हे दोन त्रिकोण आहेत, त्यास ते परस्पर बरोबर आहेत, हे सिद्ध करावयाचे.



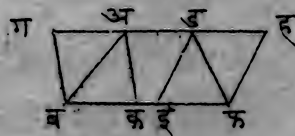
अ ड रेष दोन्ही अंगांस ई आणि फ ह्या दोन बिंदूपर्यंत वाढीव, आणि (३१ व्या सि० प्र०) ब बिंदूतून ब ई रेष अकशी समांतर कर, आणि क बिंदूतून क फ रेष बडशी समांतर कर. आतां ई ब क अ आणि ड ब क फ ह्या दोन्ही आकृति समांतरभुज चौकोन आहेत, व त्या ब क पायावर आणि ब क आणि ई फ ह्या दोन समांतर रेषांच्या आंत आहेत,

ह्या करितां (३५ व्या सि० प्र०) त्या परस्पर बरोबर आहेत; (३४ व्या सि० प्र०) अबक त्रिकोण ई-बक अ समांतर भुज चौकोनाचा अर्धाभाग आहे, कारण अब कर्णरेष त्याचे दोन समानभाग करते, तसेंच डबक त्रिकोण डबकफ समांतर भुज चौकोनाचा अर्धाभाग आहे, कारण डक कर्णरेष त्याचे दोन समानभाग करते. आतां ज्या वस्तु परस्पर बरोबर असतात त्यांचीं अर्धेही बरोबर असतात, असें सातवें प्रत्यक्ष प्रमाण आहे, ह्या करितां अबक त्रिकोण बडक त्रिकोणा बरोबर आहे.

३८ सिद्धांत.

समान पायांवर आणि समांतर रेषांचे एकाच जोडांत जे त्रिकोण असतात, ते परस्पर बरोबर असतात.

बक आणि ईफ ह्या दोन समान पायांवर आणि बफ आणि अड ह्या दोन समांतर रेषांचे जोडांत अबक आणि डईफ हे दोन त्रिकोण आहेत, त्यास



ते परस्पर बरोबर आहेत, हे सिद्ध करावयाचे.

अड बाजू ग आणि ह ह्या दोन बिंदूपर्यंत दोन्ही अंगांस वाढीच, आणि, (३१ व्या सि० प्र०) ब बिंदूतून ब ग रेघ अकशीं समांतर काढ, तसेंच फ बिंदूतून फ ह रेघ ईड रेघेशीं समांतर काढ. तेव्हां ग-ब क अ आणि ड ई फ ह हे दोन्ही समांतरभुज चौकोन आहेत. हे समांतरभुज चौकोन ब क आणि ई फ ह्या समानांशांवर आणि ब फ आणि ग ह ह्या दोन समांतर रेखांचे जोडांत आहेत, ह्याकरितां ते (३६ व्या सि० प्र०) परस्पर बरोबर आहेत. (३४ व्या सि० प्र०) ब अ कर्णरेष ग ब क अ समांतरभुज चौकोनाचे दोन समानभाग करते, ह्या करितां अ ब क त्रिकोण त्याचा अर्धभाग आहे, तसेंच ड फ कर्णरेष ड ई फ ह समांतरभुज चौकोनाचे दोन समानभाग करते, ह्या करितां ड ई फ त्रिकोण त्याचे अर्धभाग आहे. आतां ज्या वस्तु परस्पर बरोबर असतात, त्यांचीं अर्धेही बरोबर असतात, असें सातवे प्रत्यक्ष प्रमाण आहे, म्हणून अ ब क त्रिकोण ड ई फ त्रिकोणा बरोबर आहे.

३९ सिद्धांत.

एका पायावर आणि त्याच्या एके अंगास जे समान त्रिकोण असतात ते समांतर रेषांच्या एकाच जोडांत असतात.

बक पायावर त्याचे एके अंगास अबक आणि डबक असे दोन समान त्रिकोण आहेत, त्यास ते समांतर रेषांचे एकाच जोडांत आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

अ, ड बिंदू सांध; अ, ड रेष बक शीं समांतर आहे. जर नसेल तर (३१ व्या सि० प्र०) अ बिंदू-तून बक शीं अई रेष समांतर काढ, आणि कई बिंदू सांध. आतां अबक आणि बकई हे त्रिकोण



(३७ व्या सि० प्र०) बरोबर आहेत, कारण ते एका बक पायावर आहेत, आणि बक आणि अई ह्या दोन समांतर रेषांच्या आंत आहेत; परंतु अबक त्रिकोण बकड त्रिकोणा बरोबर आहे, त्याकरितां बकड त्रिकोण बकई त्रिकोणा बरोबर आहे, पणु

मोठा त्रिकोण लहाना बरोबर होणें, ही गोष्ट अशक्य आहे, ह्या करितां अड, बकशीं समांतर नाही. ह्या प्रमाणें तसिद्ध करितां येईल कीं, अड रेघे शिवाय दुसरी रेघ बकशीं समांतर होणार नाही, ह्यास्तव अड, बकशीं समांतर आहे, तेव्हां अबक आणि डबक हे त्रिकोण बक आणि अड ह्या दोन समांतर रेखांचे जोडांत आहेत.

कु० हा सिद्धांत समांतरभुज चौकोनांसाठी लागू आहे, कारण अबक आणि बकड हे त्रिकोण विवक्षित दोन समांतरभुज चौकोनांचें अर्धभाग आहेत असें मानलें, तर अड रेघ बक रेघेशीं समांतर आहे, आणि त्या दोन समांतरभुज चौकोनांच्या अ आणि ड ह्या बिंदूंतून जाणाऱ्या बाजू बकशीं समांतर असतील, ह्या करितां त्या बाजू व अड रेघ हीं (११ व्या प्र० प्र०) एकाच रेषेत असलीं पाहिजेत.

४० सिद्धांत.

जे त्रिकोण एका रेषेत असणाऱ्या अद्या समान पायांवरून रेघेच्या एके अंगास असतात ते समांतर रेखांच्या एकेच जोडांत असतात.

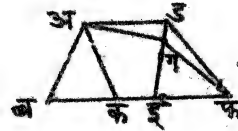
बफ रेघेंत असणाऱ्या अशा समान बक
आणि डईफ ह्या पायांवर

व बफ रेघेचे एके अंगास

अबक आणि डईफ

असे दोन त्रिकोण आहेत,

त्यास ते समांतर रेघांच्या एकेच जोडांत आहेत, असें
सिद्ध करावयाचें.



अ, ड बिंदु सांध; अड रेघ बफ रेघेचीं
समांतर आहे; नसल्यास (३१ व्या सि० प्र०) अ बिं-
दूंतून बफ रेघेचीं अग रेघ समांतर काढ. आणि
फ, ग बिंदु सांध. अबक आणि गईफ हे दोन
त्रिकोण बक आणि डईफ ह्या समान पायांवर आ-
णि बफ आणि अग ह्या समांतर रेघांच्या जोडांत आ-
हेत, ह्या करितां ते (३० व्या सि० प्र०) बरोबर आहेत, पण
अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणा बरोबर आहे, असें
पट्टीत आहे, ह्या करितां डईफ त्रिकोण गईफ त्रिको-
णा बरोबर आहे, पण मोठा त्रिकोण लहाना बरोबर
होणें अशक्य होय, ह्या करितां अग रेघ बफ रेघे-
चीं समांतर नाही, आणि ह्या प्रमाणेंच सिद्ध करून दा-
खवितां येईल, कीं अड शिवाय दुसरी रेघ बफ ची

समांतर असणार नाही, म्हणून अड, बफ रीं समांतर आहे.

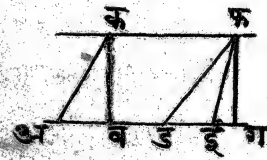
कु० हा सिद्धांत समांतर भुज चौकोनांसाठी लागू आहे. आतां त्याची सिद्धता मागल्या सिद्धांताच्या कुरलरी प्रमाणे होते.

अ सिद्धांत.

समांतर रेषांचे एकाच जोडांत जे समान त्रिकोण असतात ते समान पायांवर असतात.

अबक आणि डईफ हे दोन त्रिकोण अई आणि कफ ह्या दोन समांतर रेषांचे जोडांत आहेत, आणि हे दोन त्रिकोण क्षेत्रफळानें समान आहेत, त्याकरितां त्यांचे पाये अब आणि डई हे बरोबर आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

अब पाया डई पाया बरोबर नाही असें म्हटल्यास, अब, डई पक्षांमोठ आहे असें मानूं डई पाया ग पर्यंत वाढीच इतका कीं डग रेष अब बरोबर होईल, ग, फ बिंदु सांध. अबक आणि



डु ग फ हे दोन त्रिकोण अग आणि क फ ह्या दोन समांतर रेषांचे जोडांत आहेत, व अब आणि डु ग ह्या समान पायांवर आहेत, ह्याकरितां (३० व्या सि० प्र०) ते परस्पर बरोबर आहेत. अब क आणि डु ई फ हे त्रिकोण परस्पर बरोबर आहेत, असें गृहीत आहे, ह्या करितां डु ग फ त्रिकोण डु ई फ त्रिकोणा बरोबर आहे, पण मोठा त्रिकोण लहान त्रिकोणा बरोबर होणें अशक्य, ह्या करितां अब पाया डु ई पायापेक्षां मोठा नाही, आणि ह्याप्रमाणेच सिद्ध करून दाखवितां येईल, कीं तो त्यापेक्षां कमी नाही, ह्यास्तव अब, डु ई बरोबर आहे.

कु० हा सिद्धांत समांतरभुज चौकोनांमधील आहे.

१ टीप. "समांतर रेषांचे एकाच जोडांत" ह्या ठिकाणी "समान उंचीचे" असें म्हटलें असतांही मागील सात सिद्धांत व शेवटच्या तीन सिद्धांतांच्या कुरळच्या हीं सिद्ध होनात. "समान उंचीचे" असें म्हटलें असतां शेवटच्या तीन सिद्धांतांतील त्रिकोण किंवा समांतरभुज चौकोन हे आपल्या पायांचे एकेच अंगास कदाचित् असणार नाहीत, किंवा त्यांचे पाये एकेच रेषेत अस-

णार नाहीत. नसल्यास चिंता नाही, कारण पाहिजेत अशा दोन आकृति नसल्यास त्यांशी समान पाहिजेत अशा आकृति (२२ व्या सि० प्र०) कराव्या, आणि त्यांविषयी प्रतिज्ञार्थ सिद्ध झाला असता त्या, ज्या आकृतीशी समान केल्या आहेत त्यांविषयी सिद्ध आहे, हे स्पष्ट आहे.

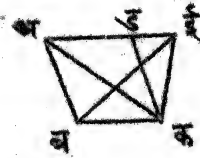
२ टीप. मागील सिद्धांतांवरून असें दिसते, कीं त्रिकोण किंवा समांतरभुज चौकोन ह्यांचे समान पाये, समान उंचाव समान क्षेत्रफळें ह्या तीन गोष्टी पैकीं दोन असल्यासर तिसरी असतेच, म्हणजे समान उंचाव समान पाये असल्यास समानक्षेत्रफळें असतात, समान पाये व समान क्षेत्रफळें असल्यास समान उंचाव असतात, आणि समानक्षेत्रफळें व समान उंचाव असल्यास समान पाये असतात.

४१ सिद्धांत.

एक समांतरभुज चौकोन आणि एक त्रिकोण हे दोन्ही एकाच पायावर आणि समांतर रेषांच्या एकाच जोडांत असल्यास, समांतरभुज चौकोन त्रिकोणाच्या दुप्पट किंवा त्रिकोण समांतरभुज चौकोनाच्या अर्धा

बरोबर असतो.

बक पायावर आणि बक आणि अई ह्या दोन समांतर रेषांच्या जोडांत अबकड समांतरभुज चौकोन आणि बकई त्रिकोण आहेत, त्यास अबकड समांतरभुज चौकोन ईबक त्रिकोणाच्या दुप्पट आहे, हे सिद्ध करावयाचे.



अ, क बिंदु सांध. अबक आणि बकई हे दोन त्रिकोण बक पायावर आणि बक आणि अई ह्या दोन समांतर रेषांच्या जोडांत आहेत, त्या करितां (३७ व्या सि. प्र०) ते बरोबर आहेत, पण (३४ व्या सि. प्र०) अबकड समांतरभुज चौकोन अबक त्रिकोणाच्या दुप्पट आहे, ह्या करितां अबकड समांतरभुज चौकोन हा ईबक त्रिकोणाच्या दुप्पट आहे.

४२ सिद्धांत.

ज्याचे क्षेत्रफळ विवक्षित त्रिकोणाबरोबर होईल, व ज्याचा एक कोन विवक्षित कोनाबरोबर

होईल, असा एक समांतरभुज चौकोन करावयाचा.

अबक एक त्रिकोण आहे, व ड एक कोन आहे. त्यास जो क्षेत्रफळानें अबक त्रिकोणाबरोबर होईल, व ज्याचा एक कोन ड कोनाबरोबर होईल,



असा समांतरभुज चौकोन काढावयाचा.

(१० व्या सि० प्र०) बक रेषेचे ई स्थळीं दोन समान भाग कर, आणि अ, ई बिंदु सांध, (२३ व्या सि० प्र०) ई क रेषेंत ई बिंदूजवळ क ई फ कोन ड कोना-एवढा कर, आणि (३१ व्या सि० प्र०) क बिंदूतून क ग रेष ई फ रेषेशीं समांतर कर, व अ बिंदूतून अ ग रेष बकशीं समांतर कर.

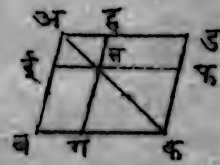
अबई आणि अईक हे दोन त्रिकोण बई आणि ईक ह्या समान पायांवर आहेत, आणि अग आणि बक ह्या दोन समांतर रेषांच्या जोडांत आहेत, ह्या करितां ते (२८ व्या सि० प्र०) बरोबर आहेत, ह्या करितां अबक त्रिकोण अईक त्रिकोणाच्या दुप्पट आहे. (४१ व्या सि० प्र०) ई ग समांतरभुज चौकोन अईक त्रिकोणाच्या दुप्पट आहे, कारण ते दोन्ही

एका ई क पायावर आणि अग आणि ई क ह्या दोन समांतर रेखांच्या मध्ये आहेत, ह्या करिता ई ग समांतरभुज चौकोन अबक त्रिकोणाबरोबर आहे, व ई ग समांतरभुज चौकोनाच्या फ ई क कोन ड कोनाबरोबर केलाच आहे.

४३ सिद्धांत.

समांतरभुज चौकोनांत कर्ण रेखा ज्या समांतरभुज चौकोनांतून जाते त्यांचे अंगास जे भरतीचे समांतरभुज चौकोन असतात ते परस्पर क्षेत्रानें बरोबर असतात.

अबकड एक समांतरभुज चौकोन आहे, व त्याचा कर्ण अ क आहे, तो ई ह आणि ग फ ह्या दोन समांतरभुज चौकोनांतून जातो, त्यास त्यांच्या अंगास जे भरतीचे समांतरभुज चौकोन बस आणि सड



* बस आणि सड ह्या दोन समांतरभुज चौकोनांस भरतीचे समांतरभुज चौकोन म्हणण्याचें कारण असें, कीं ते ई ह आणि ग फ ह्या समांतरभुज चौकोनांत विकविले असतां सगळीं अबकड समांतरभुज चौकोन होतां.

आहेत ते परस्पर बरोबर आहेत, हे सिद्ध करवयाचे.

अबकड समांतरभुज चौकोन आहे, आणि
अक, त्याचा कर्ण आहे, त्यास (३४ व्या सि० प्र०)
अबक त्रिकोण अडक त्रिकोणाबरोबर आहे. अई-
सह, समांतरभुज चौकोन आहे, आणि अस त्याचा
कर्ण आहे, त्या करितां अईस त्रिकोण अहस त्रिको-
णाबरोबर आहे, आणि ह्याच कारणास्तव सगक त्रि-
कोण सफक त्रिकोणाबरोबर आहे. अईस त्रिको-
ण अहस त्रिकोणाबरोबर आहे, व सगक त्रि-
कोण सफक त्रिकोणाबरोबर आहे, त्याकरितां अ-
ईस त्रिकोण आणि सगक त्रिकोण मिळून अहस
आणि सफक ह्या त्रिकोणांबरोबर आहेत. आतां सग-
ळा अबक त्रिकोण सगळ्या अडक त्रिकोणाबरो-
बर आहे, त्याकरितां ईग समांतरभुज चौकोन सड
समांतरभुज चौकानाबरोबर आहे, हे स्पष्ट आहे.

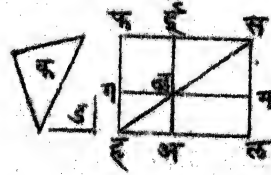
४४ सिद्धांत.

ज्याचे क्षेत्रफळ विवक्षित त्रिकोणाच्या क्षेत्रफ-
ळाबरोबर होईल व ज्याचा कोणता तरी एक कोन विव-
क्षित कोनाबरोबर होईल, असा एक समांतरभुज चौ-

कोन एकाविवक्षित रेघेस लावावयाचा.

क एक त्रिकोण आहे, ड एक कोन आहे, आणि अ-
ब एक रेघ आहे, त्यास असा एक समांतरभुज चौकोन
अ ब रेघेस लावावयाचा आहे, की ज्याचे क्षेत्रफळ क
त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळा बरोबर होईल, व ज्याचा एक
कोन ड कोनाबरोबर होईल.

(४२ व्या सि० प्र०) ज्याचा ग ब ई कोन ड को-
नाबरोबर आहे असा
ब ई फ ग समांतरभु-
ज चौकोन क त्रिकोणा
बरोबर कर, आणि तो अ-



ब रेघेजवळ अशा तऱ्हेने ठेव, कीं अ ब आणि ब ई ह्या
दोन रेघा एका रेषेत येतील. फ ग रेघ ह पर्यंत वाढीव,
अ बिंदूतून ह अ रेघ (३१ व्या सि० प्र०) ग ब र्शी
किंवा फ ई र्शी समांतर कर, आणि ह, व बिंदु सांध.
फ ह रेघ फ ई व ह अ ह्या दोन समांतर रेषांस मि-
ळते, ह्या करिता ई फ ह आणि फ ह अ हे दोन कोन

+ विवक्षित रेघेस समांतरभुज चौकोन लावणे म्हणजे विव-
क्षित रेघ त्या समांतरभुज चौकोनाची बाजू करणे.

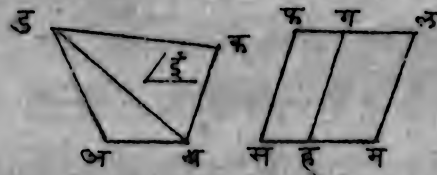
मिळून (२९ व्या सि० प्र०) दोन काटकोनां बरोबर आहेत, तेव्हां ई फ ह आणि ग ह ब हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांपेक्षां कमी आहेत. ज्या दोन रेषा तिसऱ्या रेषेशीं मिळून आंतील दोन कोन दोन काटकोनांपेक्षां कमी करतात त्या रेषा पुरत्या वाढविल्या असतां पुढें मिळतात, ह्यास्तव फ ई आणि ह ब ह्या दोन रेषा वाढविल्या असतां मिळतील. त्या स स्थळीं मिळतात, असें मावूं. स बिंदूंतून सल, ई अ किंवा फ ह रेषेशीं समांतर कर. ह अ आणि ग ब रेषा ल आणि म बिंदूपर्यंत वाढीव. आतां ह ल स फ समांतर भुज चौकोन झाला, त्यांत ह स कर्ण आहे, आणि ज्यांतून कर्णरेष जाते ते अ ग आणि म ई समांतर भुज चौकोन होत, आणि त्यांचे भरतीचे समांतर भुज चौकोन ल ब आणि ब फ होत. त्यास (४३ व्या सि० प्र०) ल ब आणि ब फ हे चौकोन परस्पर बरोबर आहेत. ब फ चौकोन क त्रिकोणा बरोबर केला आहे, ह्या करितां ल ब ही क त्रिकोणा बरोबर आहे. (१५ व्या सि० प्र०) ग ब ई कोन अबम कोना बरोबर आहे, परंतु ग ब ई कोन ड कोना बरोबर आहे, ह्यास्तव अबम कोन ही ड कोना बरोबर

आहे, त्या करितां ज्याचें क्षेत्रफळ क त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाबरोबर आहे, व ज्याचा एक अवम कोन उ कोनाबरोबर आहे, असा अवमल समांतरभुज चौकोन अब रेषेस लावून केला असे.

४५ सिद्धांत.

ज्याचें क्षेत्रफळ विवक्षित आकृतीचे क्षेत्रफळाबरोबर होईल, व ज्याचा एक कोन विवक्षित कोनाबरोबर होईल, असा एक समांतरभुज चौकोन करावयाचा आहे.

अब कड एक आकृति आहे, आणि ई हा एक कोन आहे, त्यास जो त्या आकृती बरोबर होईल, आणि ज्याचा ए-



क कोन ई कोनाबरोबर होईल, असा एक समांतरभुज चौकोन काढावयाचा आहे.

उ, व बिंदु सांध. जो अबड त्रिकोणाबरोबर होईल, व ज्याचा फसह कोन ई कोनाबरोबर होईल, असा फसह ग समांतरभुज चौकोन (४२

व्या सि० प्र०) कर, जो डबक त्रिकोणाबरोबर हो-
 ईल, व ज्याचा गहम कोन ई कोनाबरोबर होईल,
 असा गहमल समान्तरभुज चौकोन गह रेघेस
 (४४ व्या सि० प्र०) लाव. आतां फसह आणि ग-
 हम हे दोन्ही कोन ई कोना बरोबर आहेत, ह्या करि-
 तां ते परस्पर बरोबर आहेत. ह्या दोहों कोनांत गह-
 स कोन मिळीव, तेव्हां गहस आणि गहम हे दो-
 न कोन गहस आणि हस फ ह्या दोन कोनां बरोबर
 आहेत, परंतु (२९ व्या सि० प्र०) गहस आणि
 हस फ हे दोन कोन, दोन काटकोनां बरोबर आहेत,
 ह्या करितां गहस आणि गहम हे दोन कोन ही
 दोन काटकोनां बरोबर आहेत, ह्या सव (१४ व्या सि०
 प्र०) सह आणि हम ह्या दोन्ही रेघा एका रेषेंत
 आहेत. हग रेघ सम आणि फग ह्या दोन समान्तर
 रेखांस मिळते, ह्या करितां गहम व्युत्क्रम कोन हग-
 फ व्युत्क्रम कोनाबरोबर आहे. ह्या दोन्ही कोनांत ह-
 गल कोन मिळीव, तेव्हां महग आणि हगल हे
 दोन कोन हगल आणि हगफ ह्या दोन कोनां बरो-
 वर आहेत. परंतु महग आणि हगल हे दोन
 कोन दोन काटकोनांवर आहेत, ह्या करितां हगल

आणि ह ग फ हे ही दोन कोन दोन काटकोनां बरोबर आहेत. म्हणून फ ग आणि ग ल ह्या दोन रेषा एकारेष्ठंत आहेत. स फ रेषा ह ग रेषेशीं समांतर आहे, आणि ह ग म ल शीं समांतर आहे, ह्या कृतिं (३० व्या सि० प्र०) स फ म ल शीं समांतर आहे, आणि फ ल, स म रेषेशीं समांतर आहे, म्हणून स फ ल म हा समांतरभुज चौकोन आहे. अबड त्रिकोण ह फ समांतरभुज चौकोनाबरोबर आहे, आणि ड ब क त्रिकोण ग म बरोबर आहे, ह्या कृतिं स ग कें अब क ड क्षेत्र स गळ्या स फ ल म समांतरभुज चौकोनाबरोबर आहे, आणि फ स म कोन ई कोनाबरोबर केला आहे.

१ कु० ज्याचें क्षेत्रफळ एका विवक्षित सरळ रेषाकडील बरोबर होईल व ज्याचा एक कोन विवक्षित कोनाबरोबर होईल, असा समांतरभुज चौकोन एका विवक्षित रेषेस कसा लावावा, हें ह्या सिद्धांतावरून स्पष्ट करून घेतें.

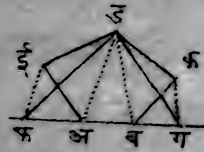
वसिष्ठांत.

ज्याचें क्षेत्र विवक्षित सरलरेषाकृतीच्या क्षेत्रा-
बरोबर होईल, असा त्रिकोण करावयाचा.

अबकडई एक क्षेत्र आहे, त्यास ह्या बरो-
बर एक त्रिकोण करावया -

चा.

अब रेषा फ आ-



णि ग ह्या बिंदूंकडे वा -

ढीव. ब, ड बिंदू सांध. क बिंदूतून क ग रेषा डब -
रेषेचीं समांतर कर, आणि ड, ग बिंदू सांध. तसेंच
अ, ड बिंदू सांध, ई बिंदूतून ई फ रेषा ड अशीं स-
मांतर कर, आणि ड, फ बिंदू सांध. डब आणि क ग
ह्या रेषा समांतर आहेत, ह्या करितां (३७ व्या सि०
प्र०) ब ड ग आणि क ड क हे दोन त्रिकोण पर -
स्परबरोबर आहेत, तसेंच अ ड आणि फ ई ह्या
रेषा समांतर आहेत, ह्या करितां फ अ ड त्रिकोण
अ ई ड त्रिकोणाबरोबर आहे, ह्या करितां अ फ ड
आणि ब ग ड हे दोन त्रिकोण मिळून अ ई ड आ-
णि ब क ड ह्या दोन त्रिकोणांबरोबर आहेत. ह्या

दोन्ही पेढ्यांत अबडु त्रिकोण मिळीव, त्यास
सगळा फुडु ग त्रिकोण अबकडई आकृती-
बरोबर झाला.

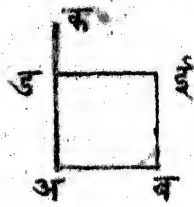
४६ सिद्धांत.

विवक्षित रेषेवर चौरस करावयाचें.

अब एक रेष आहे, त्यास तीवर चौरस
काढावयाचें.

(११ व्या सि० प्र०)

अ बिंदूतून अब रेषे-
वर अक लंब कर, आणि



अड, अब रेषेबरोबर (३ व्या सि० प्र०) कर.

(३१ व्या सि० प्र०) ड बिंदूतून अब रेषेलां ड-
ई रेष समान्तर कर, आणि व बिंदूतून बई रेष
अड रीं समान्तर कर, आतां अबईड हा समां-
तरभुज चौरस झाला, आणि ह्यासब (३४ व्या
सि० प्र०) त्याच्या समोरासमोरच्या बाजू म्हणजे
डई आणि अब आणि अड आणि बई ह्या पर-
स्परबरोबर आहेत, परंतु अब बाजू अड बाजू-
बरोबर आहे, ह्याकरितां अब, बई, डई आणि

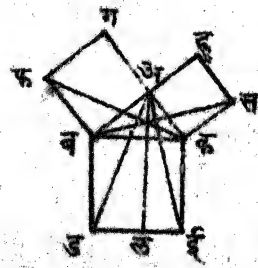
अड ह्या चारबाजू परस्पर बरोबर आहेत, ह्यास्तव
 अब ईड समांतरभुज चौकोन समभुज आहे. ह्या
 चे चारहीकोन काटकोन आहेत, कारण अड बाजू
 अब आणि ड ई ह्या दोन समांतर बाजूंस छेदिते,
 ह्या करितां (२९ व्या सि० प्र०) ब अड आणि अड-
 ई हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बरोबर आ-
 हेत, परंतु ब अड कोन काटकोन आहे, ह्या करि-
 तां अड ई हा कोनही काटकोन आहे. समांतरभुज
 चौकोनांत समोरा समोरचे कोन बरोबर असतात,
 ह्या करितां अब ई आणि ड ई ब हेही दोन कोन
 काटकोन आहेत, ह्या करितां अड ई ब ह्या समां-
 तरभुज चौकानाचे चारही कोन काटकोन आहेत,
 आणि ह्याच्या चारही बाजू सारख्या आहेत असें
 सिद्ध केलेच आहे, ह्या करितां हा चौरस आहे, आ-
 णि तें विवक्षित अब रेघेवर काढलें आहे.

१ कु० समांतरभुज चौकोनांत एक कोन काटको-
 न असला तर सर्व कोन काटकोन असतात.

४७ सिद्धांत.

काटकोन त्रिकोणांत काटकोना समोरच्या बाजूचा वर्ग त्या त्रिकोणाच्या दुसऱ्या दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर असतो.

अबक एक काटकोन त्रिकोण आहे, आणि त्याचा अ कोन काटकोन आहे, त्यास त्या समोरील बाजूचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजू व अ आणि अक ह्यांच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर आहे, हे सिद्ध करावयाचे.



(४६ व्या सि० प्र०) बक बाजूवर बई चौरस काढ, आणि अब आणि अक ह्यांवर बग आणि अस चौरसें काढ. (३१ व्या सि० प्र०) अ बिंदूतून अल रेष बडु शी किंवा कई शी समांतर कर, आणि अ, ड अ, ई ब, स आणि क, फ हे बिंदु सांध.

बअक आणि बअग ह्यांपैकी प्रत्येक कोन काटकोन आहे, त्या करितां (१४ व्या सि० प्र०)

अ क आणि ब ग ह्या दोन रेखा एके रेघेंत आहेत.
 क ब ड कोन अ ब फ कोनाबरोबर आहे, कारण
 ते दोन्ही काटकोन आहेत. दोहोंतही अबक कोन
 मिळीव, तेव्हां (२ व्या प्र० प्र०) सगळा अब ड कोन
 क ब फ कोनाबरोबर झाला. अब आणि ब ड ह्या
 बाजू अनुक्रमें फ ब आणि ब क ह्या बाजूंबरोबर
 आहेत, ह्या करितां (४ व्या सि० प्र०) अब ड त्रि-
 कोण फ ब क त्रिकोणाबरोबर आहे. अब ड त्रि-
 कोण आणि ब ल समांतरभुज चौकोन ब ड पाया-
 वर आणि ब ड आणि अ ल ह्या समांतर
 रेखांच्या जोडांत आहेत, ह्या करितां (४१ व्या सि०
 प्र०) ब ल समांतरभुज चौकोन अब ड त्रिको-
 णाच्या दुप्पट आहे, तसेंच फ ब क त्रिकोण आ-
 णि ब ग चौरस हीं फ ब पायावर आणि फ ब आ-
 णि ग क ह्या दोन समांतर रेखांच्या जोडांत आहेत,
 ह्या करितां ब ग चौरस फ ब क त्रिकोणाच्या दुप्पट
 आहे. अब ड त्रिकोण फ ब क त्रिकोणाबरोबर
 आहे, ह्या करितां (६ व्या प्र० प्र०) ब ल समांतर-
 भुज चौकोन ब ग चौरसाबरोबर आहे. ह्या प्रमाणें
 ल क समांतरभुज चौकोन क ह चौरसाबरोबर

आहे, जसें सिद्ध होईल, त्यासच बल आणि कल हे समांतरभुज चौकोन म्हणजे बई चौरस बग आणि कह चौरसांबरोबर आहे, आतां बई चौरस बक बाजूचा वर्ग आहे, आणि बग आणि कह हीं चौरसें अब आणि अक ह्यांचे वर्ग आहेत, ह्या करितां बक बाजूचा वर्ग अब आणि अक ह्या बाजूंच्या वर्गांचे बेरजेबरोबर आहे, हे सिद्ध.

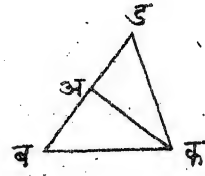
१ कु० काटकोन त्रिकोणांत काटकोनाजवळच्या कोणत्याही बाजूचा वर्ग, कर्ण आणि दुसरी बाजू ह्यांचे वर्गांचे वजाबाकीबरोबर आहे, कारण $बकै = बअ + अकै$ आणि $अकै$ दोन्ही पेट्यांतून काढून टाकिला असतां $बकै - अकै = बअ$ किंवा $बअ$ काढून टाकिला असतां $बकै - बअ = अकै$.

४८ सिद्धांत.

कोणत्याही त्रिकोणाच्या एका बाजूचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर असल्यास त्या दोन बाजूंच्या मधील कोन काटकोन असतो.

अबक एक त्रिकोण आहे, त्याच्या बक बाजूचा

वर्ग अब आणि अक
ह्या दोन बाजूंच्या वर्गांच्या
बरोबरी बरोबर आहे, त्या -
सब अक कोन काट -
कोन आहे, हे सिद्ध करावयाचे.



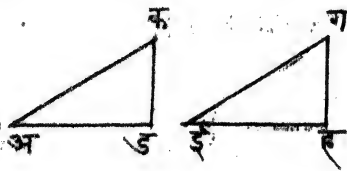
(११ व्या सि० प्र०) अ बिंदूतून अक रेषे -
वर अड लंब कर, अड रेषे अ ब रेषेबरोबर कर,
आणि ड, क बिंदु सांधे अड बाजू अब बाजू
बरोबर केली आहे, ह्याकरिता अड चा वर्ग अब
चे वर्गाबरोबर आहे. दोन्ही वर्गांमध्ये अक चा वर्ग
मिळीव, त्यास अड आणि अक मिळून अब आ
णि अक ह्याबरोबर आहेत, पण ड अक हा का -
टकोन आहे, ह्याकरिता (४७ व्या सि० प्र०) डक
अड आणि अक ह्यांचे वर्गाबरोबर आहे, आणि
बक, अब आणि अक ह्यांचे वर्गाबरोबर आहे,
असे गृहीत आहे, ह्याकरिता डक बक वर्गाबरोबर
आहे, ह्यास्तव डक बाजू बक बाजू बरोबर आहे,
अडक त्रिकोणाच्या अड, अक, आणि डक ह्या
तीन बाजू अबक त्रिकोणाच्या अब, अक, आ -
णि बक ह्या तीन बाजूंशी अनुक्रमेण बरोबर आहेत,

३ ह्या करितां हे दोन त्रिकोण (८ व्या सि० प्र०) एक -
रूप आहेत, म्हणून ड अ क कोन ब अ क कोना-
बरोबर आहे, परंतु ड अ क कोन काटकोन आहे,
ह्यास्तव ब अ क कोनही काटकोन आहे.

क सिद्धांत.

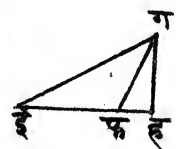
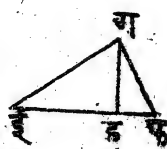
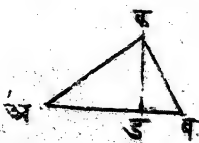
दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू आणि त्या
दोहों पैकीं कोणत्याही बाजू समोरील कोन हीं दुसऱ्या
त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि पहिल्या त्रिकोणांत ज्या
बाजू समोरील कोन घेतला आहे त्या बाजूच्या बरोब-
रीची जी दुसऱ्या त्रिकोणांतील बाजू तिच्या समोरील
कोन ह्यांशीं अनुक्रमें बरोबर असल्यास, आणि दोहों
त्रिकोणांतील दुसऱ्या ज्या बरोबरीच्या दोन बाजू ह्यां
समोरील कोन सजातीय असल्यास ते दोन त्रिकोण स-
र्वांशीं एकरूप असतात.

अडक त्रिकोणाच्या अक आणि कड
ह्या दोन बाजू ई ग ह
त्रिकोणाच्या ई ग आणि
ग ह ह्या दोन बाजूं बरोब-
र आहेत, अक आणि



ई ग ह्या बाजूं समोरील कोन ड आणि ह हे काट-
कोन आहेत, व क ड आणि ग ह ह्या बाजूं समोरी-
ल अ आणि ई हे कोन ३२ व्या सिद्धांताची चव-
थी कुरलरी, आणि १५ वी व्याख्या ह्यावरून सजातीय
आहेत, त्यास हे दोन त्रिकोण सर्वांशीं एकरूप आहेत,
हे सिद्ध करावयाचे.

अ क बाजू ई ग बाजू बरोबर आहे, आणि
क ड, ग ह बरोबर आहे, ह्या करितां अ क - क ड =
ई ग - ग ह, परंतु ४७ व्या सिद्धांताच्या कुरलरीवरून
अ ड = अ क - क ड, आणि ई ह = ई ग -
ग ह. ह्या करितां अ ड = ई ह आणि ह्यास्तव
अ ड, ई ह बरोबर आहे, तेव्हां अ क ड त्रिको-
णाच्या तीन बाजू ई ग ह त्रिकोणाच्या तीन बाजूंशीं
अनुक्रमें बरोबर आहेत, ह्या करितां (८ व्या सि० प्र०)
ते दोन त्रिकोण सर्वांशीं एकरूप आहेत, म्हणून अ को-
न ई कोना बरोबर आहे, आणि क कोन ग कोना-
बरोबर आहे.

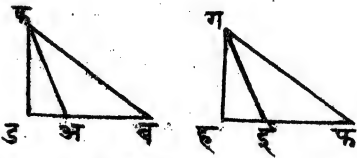


अबक त्रिकोणाच्या अक आणि कबद्या
 दोन बाजू ईफग त्रिकोणाच्या ईग आणि गफ
 ह्या दोन बाजूंबरोबर आहेत, व अक आणि फ -
 ईग हे कोन समान आहेत व लघु आहेत, आणि
 दुसऱ्या ज्या बरोबरीच्या बाजू त्यां समोरील अ-
 बक आणि ईफग कोन हे दोन्ही लघु आहेत,
 किंवा विशाळ आहेत, त्यापक्षां अबक आणि
 ईफग हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत, हें सि
 उकरावयाचें.

अब आणि ईफ ह्या पायांवर (दुसऱ्या दोन
 त्रिकोणांत ते वाढवून) कड आणि गह लंबकर,
 अडक त्रिकोणाचा ड काटकोन ईहग त्रिको-
 णाच्या ह काटकोनाबरोबर आहे, अ कोन ई को-
 नाबरोबर आहे, आणि अक बाजू ईग बाजू बरो-
 बर आहे, त्यास (२६ व्या सि० प्र०) अडक आ-
 णि ईहग हे दोन त्रिकोण एकरूप, म्हणून कड
 बाजू गह बाजू बरोबर, व अड बाजू ईह बाजू बरोबर.
 कड व त्रिकोणाची कब बाजू गहफ त्रिकोणाच्या
 गफ बाजू बरोबर आहे, कड बाजू गह बाजू बरोबर आ-
 हे, व ड काटकोन ह काटकोनाबरोबर आहे, त्यास ते

दोन त्रिकोण एकरूप, म्हणून ड ब बाजू हफ बा-
जूबरोबर आहे. आता (पहिल्या दोन त्रिकोणांत)
अड आणि ड ब ह्यांची बेरीज ई ह आणि ह फ
ह्यांच्याबरोबर आहे, म्हणजे अब, ई फ बरो-
बर आहे. दुसऱ्या दोन त्रिकोणांत अड आणि ड-
ब ह्यांची वजाबाकी ई ह आणि ह फ ह्यांच्या वजा
बाकीबरोबर आहे, म्हणजे अब, ई फ बरोबर आ-
हे, म्हणून अबक आणि ई फ ग ह्या दोन त्रिको-
णांत एकाच्या तीन बाजू दुसऱ्याच्या तीन बाजूंबरो-
बर आहेत, ह्याकरिता ते दोन त्रिकोण एकरूप, म्हणून
अबक कोन ई फ ग कोनाबरोबर आहे, व अ-
कक कोन ई ग फ कोनाबरोबर आहे.

क अब आणि ग ई फ हे कोन विशाळ आ-
हेत, त्यापक्षां क अब
आणि ग ई फ ह्या दोन
त्रिकोणांच्या क आणि
ग शिरोबिंदूपासून क-ड
अड आणि ग ह लंब केले असता ते बाहेरल्या अंगास
पडतील. क अब कोनाजवळचा जो कोन कअ-
ड हा (१३ व्या सि.कु.प्र०) क अब कोनाच्या



बरोबरीचा जो कोन ग ई फ ह्याच्या जवळच्या
 ग ई ह कोनाबरोबर आहे. उ आणि ह हे कोन
 काटकोन आहेत, व अ क बाजू ई ग बाजूबरोबर
 आहे, म्हणून अ उ क आणि ई ह ग हे दोन त्रि-
 कोण एकरूप आहेत, व ह्या प्रमाणेच क उ व आ-
 णि ग ह फ हे त्रिकोणबरोबर आहेत, हे सिद्ध हो-
 ते, आतां अ उ, ई ह बरोबर आहे, व उ व, ह फ
 बरोबर आहे, ह्यास्तव उ व - उ अ = ह फ - ह
 ई म्हणजे अ व = ई फ, आणि ह्याकारणास्तव अ-
 व क आणि ई फ ग हे दोन त्रिकोण (८ व्या सि.
 प्र०) सर्वांशीं एकरूप आहेत.

कु० एक काटकोन त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन
 बाजू दुसऱ्या काटकोन त्रिकोणाच्या तदनु रूप
 बाजूंशीं अनुक्रमे सारख्या असल्या तर ते दोन त्रि-
 कोण एकरूप असतात.

पहिल्याबुकाचे प्रश्न.

- १ जी रेषा समद्विभुज त्रिकोणाच्या शिरकोना-
चे दोन भाग समान करिते ती रेषा पायावर लंब
असते व त्याचेही दोन भाग समान करिते.
- २ दोन विवक्षित बिंदूंपासून सारख्या अंतरावर
विवक्षित रेषेत कोणता बिंदु आहे तो काढायचा.
- ३ एका रेषेचे दुसऱ्या रेषेने तीवर लंब राहून, दोन
समान भाग केले असता लंब रेषेतील प्रत्येक बिंदु
ज्या रेषेचे दोन समान भाग झाले आहेत तिच्या दो-
वटांपासून सारख्या अंतरावर असतो, आणि जो बिं-
दु लंब रेषेत नाही तो त्या दोवटांपासून सारख्या अंत-
रावर नसतो.
- ४ विवक्षित दोन बिंदूंस सांधणाऱ्या रेषेच्या म-
ध्यांतून एक रेषा काढिली असता त्या रेषेत मध्या
पासून सारखे अंतरावर जे दोन बिंदु असतील ते वि-
वक्षित दोन बिंदूंपासून सारखे अंतरावर असतील.
- ५ विवक्षित बिंदूंपासून विवक्षित रेषेवर ज्या
काय रेषा काढता येतील त्या सर्वांमध्ये जी रेषा विव-
क्षित रेषेवर लंब होईल तीच रेषा सर्व रेषांमध्ये ला-

हान होईल. इतर रेषांपैकी लंबाच्या समीप तर जी रेषा असेल ती तिच्या पलीकडची जी दूरतर रेषा तीपेक्षां लहान होईल. विवक्षित बिंदू पासून विवक्षित रेषेवर समान अशा दोनच रेषा काढतां येतील, पण त्यांपैकी एक लंबाच्या उजव्या अंगास व एक लंबाच्या डाव्या अंगास पडेल.

६ त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंची बजाबाकी तिसऱ्या बाजूपेक्षां कमी असते.

७ विवक्षित दोन बिंदूंस सांधणाऱ्या रेषेचे समान दोन भाग करणारी अशी एक रेषा काढली आणि त्या रेषेवर विवक्षित बिंदू पासून लंब काढिले तर ते बरोबर होतील.

८ कोनाचे दोन समान भाग करणाऱ्या रेषेतील प्रत्येक बिंदू कोनाच्या बाजू पासून सारखे अंतरावर असतो.

९ समान अशा दोन समांतर रेषांची व्युत्क्रम शेवटे ज्या रेषा सांधितात त्या परस्परांचे दोन समान भाग करितात.

१० समाक्षुज त्रिकोणाचा शिरकोन काढकोन असल्यास पायाकडील प्रत्येक कोन अर्ध्या काढकोना

बरोबर असतो.

११ समद्विभुज त्रिकोणांत शिरकोनाची बाजू शिरोबिंदूपलीकडे वाढविली असता बाहेरील अंगास जो कोन पडतो तो पायाकडील प्रत्येक कोनाच्या दुप्पट असतो.

१२ एके त्रिकोणाचा बाहेरील कोन आणि आंतील पलीकडचा एक कोन हे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या त्या कोनाच्या दुप्पट असल्यास पहिल्या त्रिकोणाचा दुसरा आंतील पलीकडचा कोन दुसरे त्रिकोणाच्या दुसरे आंतील पलीकडच्या कोनाचे दुप्पट आहे.

१३ विवक्षित बिंदूतून विवक्षित दोन समांतर रेषांस छेदणारी एक रेषा अशी करावयाची आहे, कीं त्या दोन रेषांत जो तिचा भाग सांपडेल तो विवक्षित रेषे बरोबर होईल.

१४ विवक्षित बिंदूतून विवक्षित रेषांस छेदून जाणारी अशी एक रेषा करावयाची आहे, कीं तिचा कल त्या दोन्ही रेषांकडे सारखा राहील, म्हणजे ती रेषा त्या दोन्ही रेषांशी कोन समान करील.

१५ परस्परसं छेदणाऱ्या दोन रेषा दुसऱ्या दोन परस्परसं छेदणाऱ्या रेषांशी अनुक्रमेण समांतर अस-

त्या तर प्रथम दोन रेखांतील कोन दुसरे दोन रेखां-
तील कोनाबरोबर असतो.

१६ त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची बेरीज पायाचा म-
ध्य आणि शिरकोन ह्यांस सांधणाऱ्या रेषेचे दुपटी-
पेक्षां मोठी असते.

१७ काटकोण त्रिकोणाचा कर्ण व एक बाजू ह्यां-
ची बेरीज किंवा वजाबाकी व तिसरी बाजू इतकें
सांगितलें असतां काटकोन त्रिकोण काढावया-
चा.

१८ दोन विवक्षित रेषा आहेत व त्यांच्या मध्ये
एक विवक्षित बिंदु आहे, त्यास त्या बिंदूतून त्या दो-
न रेखांस छेदून जाणारी अशी एक रेषा काढावयाची
आहे, कीं तिचा जो भाग त्या दोन रेखांच्या मध्ये सांप-
डेल त्याचे समान दोन भाग त्या विवक्षित बिंदू मध्ये
होतील.

१९ समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायांतील कोणत्या-
ही बिंदूतून दोन्ही बाजूंवर दोन लंब केले असतां
त्यांची बेरीज पायाच्या कोणत्याही चौकटा पासून
समोरील बाजूवर लंब केला असतां त्याबरोबर
होते.

२० त्रिकोणाच्या पायाकडील कोनांचे ज्या रेषा दोन भाग समान करितात त्यांचा छेदनबिंदु आणि शिरोबिंदु ह्यांस सांधणारी रेषा शिरकोनाचे दोन भाग समान करिते.

२१ समभुजत्रिकोणामध्ये कोठेही बिंदु घेऊन त्यापासून तिन्ही बाजूंवर लंब केले असता त्यांची बेरीज समभुजत्रिकोणाच्या कोणत्या तरी कोनापासून त्याच्या समोरील बाजूवर लंब केला असता त्या बरोबर होते.

२२ त्रिकोणाचा शिरकोन विशाल असल्यास शिरोबिंदु आणि पायाचा मध्य ह्यांस सांधणारी रेषा पायाच्या अर्धापेक्षां कमी असते, शिरकोन काटकोन असल्यास शिरोबिंदु आणि पायाचा मध्य ह्यांस सांधणारी रेषा पायाच्या अर्धाबरोबर असते. शिरकोन लघु असल्यास ती रेषा पायाच्या अर्धापेक्षां जास्त असते.

२३ त्रिकोणाच्या दोन बाजूंवर त्यांचे समान दोन भाग करणारे असे लंब केले आणि त्यांच्या छेदनबिंदूपासून तिसरे बाजूवर लंब केला तर तो तिचे दोन भाग समान करतो.

२४ त्रिकोणाच्या शिरकोनापासून पायावर लंबके-
ला असतां व शिरकोनाचे दोन समानभाग करणारी
अशी रेषा केळी असतां त्या दोन रेषांच्यामध्ये जो कोन
सांपडतो तो पायाकडील कोनांच्या वजाबाकीच्या अर्धा
बरोबर होतो.

२५ विवक्षित रेषेत असा एक बिंदु काढावयाचा
आहे, कीं त्या बिंदूपासून विवक्षित दोन बिंदूपर्यंत
रेषा काढल्या असतां जे कोन पडतील ते सारखे हो-
तील.

२६ त्रिकोणाच्या बाजूंची बेरीज व पायाकडील को-
न इतकें सांगितलें आहे, त्यापासून त्रिकोण काढावयाचा.

२७ त्रिकोणाच्या पायाच्या दोन्ही शेवटांपासून त्यां-
च्या समोरच्या बाजूंचे दोन समान भाग करणाऱ्या अ-
शा रेषा काढल्या आणि त्यांचा छेदन बिंदु आणि शिरो-
बिंदु ह्यांस सांधणारी रेषा वाढविली तर ती पायाचे
दोन भाग समान करते.

२८ एका पायावर व त्याच्या एकेच बाजूस एकां-
त एक अशा दोन समान बहुकोणाकृति असल्या त-
र बाहेरील बहुकोणाकृतीच्या बाजूंची परिमिति आं-

नील बहुकोणाकृतीच्या बाजूंच्या परिमितीपेक्षां मोठी
होईल.

Kakaji Gopal Joshi

बूकदुसरे.

व्याख्या

१ ज्या बिंदूमध्ये रेघेचा छेद होतो त्यास छेदनबिंदु असें म्हणतात.

२ छेदनबिंदूपासून रेघेच्या मध्यापर्यंत जे अंतर त्यास मध्यांतर असें म्हणतात.

३ छेदनबिंदु रेघेच्या टोंकांच्या मध्ये असल्यास रेघेचा छेद आंतल्या अंगानें झाला असें म्हणतात, व तो बिंदु एका टोंकापलीकडे असल्यास रेघेचा छेद बाहेरील अंगानें झाला असें म्हणतात.

४ रेघेच्या छेदनबिंदूपासून निवे टोंकांपर्यंत जी अंतरें त्यांस निवे खंड असें म्हणतात.

५ दोन रेषांच्या काढकोन म्हणजे ज्याच्या जबक्या बाजू त्या दोन रेषा किंवा त्यांच्या बरोबरीच्या रेषा असतात तो होय.

कोणतेही दोन रेषा जसें अ ब आणि ब क ह्यांचा काढकोन चौकोन कधीं कधीं अ ब ब क असा लिहितात. तसेंच अ आणि ब ह्या दोन रेषा असल्यास त्यांचा काढकोन चौकोन अ ब असा लिहितात. अ आणि ब मिळून

एक रेघ असली, व क एक रेघ असली तर त्यांचा काटकोन चौकोन $(अ + ब)$ क असा लिहितात. अ आणि ब ह्यांच्या वजाबाकीबरोबर एक रेघ असली, व क एक रेघ असली तर त्यांचा काटकोन चौकोन $(अ - ब)$ क असा लिहितात. $अ + ब$ बरोबर एक रेघ असली व $अ - ब$ बरोबर एक रेघ असली तर त्यांचा काटकोन चौकोन $(अ + ब)$ $(अ - ब)$ असा लिहितात.

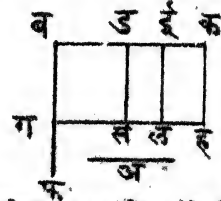
६ ज्या रेघेचे असे दोन खंड होतात, कीं सगळी रेघ व एक खंड ह्यांचा काटकोन चौकोन दुसऱ्या खंडाचे वर्गाबरोबर होतो त्या रेघेचे छेदनमध्यप्रमाणाने किंवा मध्यप्रमाणांत झालेले असे म्हणतात.

दुसरेंबूक

१ सिद्धांत.

दोन रेखांपैकीं एकीचे कितीही भाग केले असता त्या दोन रेखांचा काटकोन चौकोन अखंड रेख, आणि छिन रेखेचे भाग ह्यांच्या काटकोन चौकोनांच्या बरोबर बरोबर होतो.

अ आणि बक ह्या दोन रेखा आहेत. त्यांपैकीं बकचे बड, डई, आणि ईक असे भाग केले आहेत, त्यास अ आणि बक ह्यांचा काटकोन चौकोन, अ आणि बड ह्यांचा काटकोन चौकोन, आणि अ आणि डई ह्यांचा काटकोन चौकोन, आणि अ आणि ईक ह्यांचा काटकोन चौकोन ह्या सर्वान्नांबरे जे बरोबर आहे, हे सिद्ध करावयाचे.



ब विंदूतून बक रेखेवर (१ बू. ११ व्या सि. प्र०) ब फ रेख लंब कर, आणि (१ बू. ३ व्या सि. प्र०) ब ग, अ बरोबर कर. (१ बू. ३१ व्या सि. प्र०) ग विंदूतून ग ह रेख बकशीं समांतर कर, आणि ड, ई, आणि क ह्या विंदूतून ड स, ई ल आणि क ह ह्या रेखा बग रेखीं समांतर कर. आतां ब ह काटकोन चौकोन बस,

डल आणि ईह ह्या काटकोन चौकोनांबरोबर आहे.
 बह काटकोन चौकोन वक आणि बग ह्या दोन रे-
 खांनी झाला आहे, पण बग रेखा, अ बरोबर आहे,
 ह्या करितां बह काटकोन चौकोन वक आणि अ
 ह्या दोन रेखांनी झाला आहे असें म्हणण्यास चिंता ना
 हीं. बस काटकोन चौकोन वड आणि बग ह्या
 दोन रेखांनी झाला आहे. डल काटकोन चौकोन
 डई आणि डस ह्या दोन रेखांनी झाला आहे. तसें-
 च ईह काटकोन चौकोन ईक आणि ईल ह्या
 दोन रेखांनी झाला आहे. (१ ब्र० ३४ व्या सि० ३०)
 डस आणि ईल ह्या दोन रेखांमध्ये बग बरोबर
 आहेत, आणि बग, अ बरोबर आहे, ह्या करितां ब-
 स, डल आणि ईह हे काटकोन चौकोन वड आ-
 णि अ, डई आणि अ आणि ईक आणि अ ह्या रे-
 खांनी झाले आहेत, असें म्हणण्यास काय बाध आहे?
 तेव्हां ही गोष्ट स्पष्ट आहे, कीं अ आणि वक ह्या दोन रेखा-
 चा काटकोन चौकोन अ आणि वड, अ आणि डई,
 व अ आणि ईक ह्या रेखांच्या काटकोन चौकोनांबरो-
 बर आहे.

२ सिद्धांत प्रमेय

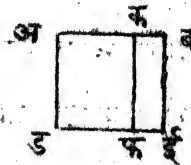
रेघेचे कसेही दोन भाग केले असता ते भाग आणि सर्व रेघ ह्यांच्या काटकोन चौकोनांची बेरीज त्या रेघेच्या वर्गाबरोबर असते.

अब एक सरळ रेघ आहे. हिचे क म्यळी अक आणि बक असे

दोन भाग केले आहेत, त्यास

अब आणि अक ह्यांचा

काटकोन चौकोन व



अब आणि बक ह्यांचा काटकोन चौकोन ह्यांची बेरीज अबच्या वर्गाबरोबर आहे, हे सिद्ध करावयाचे.

अब रेघेवर (१ बु. ४८ व्या सि. प्र.) अडईब चौरस काट, आणि (१ बु. ३१ व्या सि. प्र.) क बिंदूतून कफ रेघ अडईशी किंवा बईशी समांतर कर.

अई चौरस अफ आणि कई ह्या दोन काटकोन चौकोनांच्या बेरजेबरोबर आहे. अई आकृति अब रेघेचा वर्ग आहे. अफ काटकोन चौकोन अक

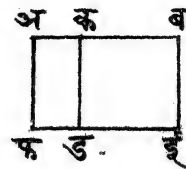
आणि अड ह्या रेषांनीं झाला आहे; तसेंच क ई काटकोनचौकोन ब क आणि क फ ह्या रेषांनीं झाला आहे; परंतु अड, क फ बरोबर आहे, आणि अड, अब बरोबर आहे, ह्याकरितां अड आणि क फ ह्या दोन रेषा अब बरोबर आहेत, ह्यास्तव अ फ आणि क ई हे दोन काटकोनचौकोन अक आणि अब, ब क आणि अब ह्या रेषांनीं झाले आहेत असें म्हणण्यास चिंता नाही, ह्यास्तव अब रेषेचा वर्ग अब आणि अक ह्यांचा काटकोनचौकोन व अब आणि ब क ह्यांचा काटकोनचौकोन ह्या दोहोंचें बेरजे बरोबर आहे.

३ सिद्धांत प्रमेय.

रेषेचे कसेही दोन भाग केले असतां सगळी रेषा व दोहोंपैकी कोणताही एक भाग ह्यांचा काटकोनचौकोन, दोन भागांचा काटकोनचौकोन व पूर्वी घेतलेल्या भागाच्या वर्ग, ह्यांच्या बेरजे बरोबर होतो.

अब रेषेचे क स्थळीं अक आणि ब क असे दोन भाग केले आहेत, त्यास अब आणि ब क ह्यांचा काटकोनचौकोन अक आणि ब क ह्यांचा

चा काटकोनचौकोन व
बक चा वर्ग ह्यांचे बे-
रजे बरोबर आहे, हें सि-
द्ध करावयाचें.

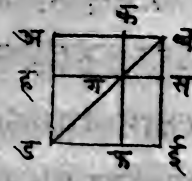


बक रेषेवर (१ बू० ४६ व्या सि० प्र०)
कड ईब चौरस कर, ईड बाजू फ बिंदूपर्य-
ंत वाढीव, आणि अ बिंदूतून (१ बू० ३१ व्या सि०
प्र०) अफ रेष कडवीं किंवा ब ई र्शीं समां-
तर कर. अई काटकोनचौकोन अड आणि क ई
ह्या दोन आकृतींचे बेरजे बरोबर आहे. अई काट-
कोनचौकोन अब आणि ब ई ह्या रेषांनीं झाला
आहे, परंतु ब ई रेष बक बरोबर आहे, ह्या करि-
तां अई काटकोनचौकोन अब आणि बक ह्या
दोन रेषांनीं झाला आहे. अड काटकोनचौकोन
अक आणि कड ह्या दोन रेषांनीं झाला आहे, प-
रंतु कड, बक बरोबर आहे, ह्या करितां अड
काटकोनचौकोन अक आणि बक ह्या रेषांनीं
झाला आहे, असें म्हणण्यास चिता नाही. क ई आ-
कृति बकचा वर्ग आहे, ह्या करितां, अब बक =
अक बक + बक.

४ सिद्धांत प्रमेय.

कोणत्याही रेषेचे दोनभाग केले असता त्या रे-
षेचा वर्ग दोनभागांचे वर्ग आणि त्या दोनभागांच्या का-
टकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे.

अब एक रेष आहे. तिचे क बिंदूत दोनभाग
केले आहेत, त्यास अब चा वर्ग, अक आणि बक
ह्यांचे वर्ग व अक आणि
बक ह्यांच्या काटकोनचौ -
कोनाची दुप्पट ह्यांच्या बे-
रजेबरोबर आहे, हे सिद्ध-
करावयाचे.



(१ बू० ४६ व्या सि० प्र०) अब रेषेवर अ-
ई चौरस काढ, आणि ब, ड बिंदु सांध. (१ बू० ३१ व्या
सि० प्र०) क बिंदूतून क ग फ रेष ब ई शी किं -
वा अ ड शी समांतर काढ, आणि ग बिंदूतून ह ग -
स रेष अब शी किंवा ड ई शी समांतर काढ. आ-
तां अ ड आणि क फ ह्या दोन समांतर रेषांवर
ब ड रेष पडते, ह्याकरितां (१ बू० २९ व्या सि० प्र०)
क ग ब बाह्यकोन अ ड ब कोनाबरोबर आहे.

अड आणि अब ह्या दोन बाजू चौरसांच्या आहेत,
 ह्या करितां त्या परस्परबरोबर आहेत, म्हणून (१ बू०
 ५ व्या सि० प्र०) अड ब कोन अबड कोनाबरो-
 बर आहे, म्हणून क ग ब कोन क ब ग कोनाबरोबर
 आहे, आणि ह्यास्तव (१ बू० ६ व्या सि० प्र०) क-
 ग बाजू क ब बाजूबरोबर आहे. (१ बू० ३४ व्या
 सि० प्र०) क ग बाजू ब स बाजू बरोबर आहे, आ-
 णि क ब बाजू ग स बाजूबरोबर आहे, ह्या करितां
 क ग स ब समांतर भुज चौकोन समभुज आहे, व
 त्याचा ब कोन काटकोन आहे, ह्या करितां (१ बू०
 ४६ व्या सि० प्र०) त्याचे चारही कोन काटकोन आ-
 हेत, ह्यास्तव तो चौरस आहे, आणि तो चौरस ब क
 बाजूवर काढला आहे. ह फ आकृतिही चौरस
 आहे, आणि हा चौरस अ क चाबरोवरीच्या ह ग
 बाजूवर काढला आहे, हे ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होतें,
 ह्यास्तव क स आणि ह फ ह्या आकृति ब क आणि
 अ क ह्यांचे वर्ग होत. (१ बू० ४३ व्या सि० प्र०) अ-
 ग काटकोन चौकोन ग र्ई काटकोन चौकोनाबरोबर
 आहे, आणि अ ग काटकोन चौकोन अ क आणि
 क ग ह्या बाजूंनीं झाला आहे, म्हणजे अ क आणि

बक ह्या बाजूनी झाला आहे. अग काटकोनचौ-
कोन ग ई काटकोनचौकोनाबरोबर आहे, ह्या करि-
तां अग, ग ई हे काटकोनचौकोन अक आणि
बक ह्या दोन रेषांच्या काटकोनचौकोनाच्या दुप्पटी
बरोबर आहेत. हफ आणि कस हे अक आ-
णि बक ह्या रेषांचे वर्ग आहेत, ह्या करितां हफ,
कस, अग आणि ग ई ह्या चार आकृति अ
क आणि बक ह्यांचे वर्ग, व अक आणि बक
ह्यांचे काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्या बरोबर आ-
हेत. ह्या चार आकृती मिळून अ ई आकृति होते,
पण अ ई आकृति अब चा वर्ग आहे, ह्या करि-
तां अब = अक + बक + २ अक × बक.

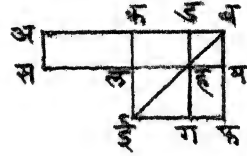
कुरलरी. ह्या सिद्धांतावरून असे स्पष्ट दिसू-
न येते, कीं चौरसांत ज्या समांतर भुजचौकोनांतून
कर्ण जातो तेही चौरस असतात.

५ सिद्धांत प्रमेय.

कोणत्याही रेषेचे दोन समान व दोन असमान
असे भाग केले असतां असमान भागांच्या काटकोनचौ-
कोन व छेदन बिंदूतील अंतराचा वर्गही रेषेच्या अर्धा

च्या वर्गाबरोबर असतात.

अब रेघेचे अक आणि बक हे दोन समान भाग क बिंदूत केले आहेत, आणि ड बिंदूत अड आणि बड हे दोन असमान भाग केले आहेत, त्यास अड आणि बड ह्यांचा काटकोनचौकोन आणि कड चा वर्ग ही बकच्या वर्गाबरोबर आहेत, हे सिद्ध करावयाचे.



(१ ब्रू० ४६ व्या सि० प्र०) बक रेघेवर बक-ईफ चौरस कर, आणि ई, ब बिंदू सांघ. ड बिंदूतून (१ ब्रू० ३१ व्या सि० प्र०) डहग रेघ कईशी किंवा बफशी समांतर कर, ह बिंदूतून सलमरेष अबशी किंवा ईफ शी समांतर कर, आणि अ बिंदूतून असरेष कल शी किंवा बम शी समांतर कर. (१ ब्रू० ४३ व्या सि० प्र०) क ह काटकोनचौकोन हफ काटकोनचौकोनाबरोबर आहे. ह्या दोहोंत डम काटकोनचौकोन मिळीव. तेव्हा क म काटकोनचौकोन डफ काटकोनचौकोनाबरोबर साद्य. (१ ब्रू० ३५ व्या सि० प्र०) अल काटकोनचौकोन

कम काटकोनचौकोनाबरोबर आहे, कारण अ क पाया व क पाया बरोबर आहे, आणि ह्यास्त व अ ल काटकोनचौकोन ही ड फ बरोबर आहे. ह्या दोहोंत क-ह काटकोनचौकोन मिळीव, तेव्हां अ ह काटकोनचौकोन कम ग आकृतीबरोबर झाला. अ ह काटकोनचौकोन अ ड आणि ब ड ह्या रेखांनी झाला आहे, कारण ब ड, ड ह बरोबर आहे. ह्या करितां अ ड व ड काटकोनचौकोन कम ग आकृतीबरोबर आहे.

ह्या दोन्ही पैघ्यांत लग मिळीव. लग, क ड चे वर्गाबरोबर आहे, ह्या करितां अ ड आणि ब ड ह्यांचा काटकोनचौकोन व क ड चा वर्ग हीं कम ग व लग ह्या आकृतीबरोबर आहेत. पण कम ग आणि लग ह्या आकृती मिळून सर्व आकृति क फ होते, आणि क फ, क ब चा वर्ग आहे, ह्या करितां अ ड आणि ब ड ह्यांचा काटकोनचौकोन आणि क ड चा वर्ग हीं क ब च्या वर्गाबरोबर आहेत, हे सिद्ध.

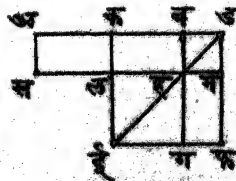
१ कु० ब क आणि क ड ह्या दोन विषम रेखांच्या वर्गांची वजाबाकी, त्या दोन रेखांची बेरीज आणि वजाबाकी ह्यांचा काटकोनचौकोनाबरोबर आहे, हे ह्या सिद्धांतावरून स्पष्ट दिसून येते, कारण, ब के =

अड० बड + कडै, कडै ह्या दोन्ही पेव्यांतून
 वजा केला असतां बकै - कडै = अड० बड
 = (बक + कड) (बक - कड), कारण, ब-
 क + कड = अक + कड = अड.

६ सिद्धांत. प्रमेय.

कोणत्याही रेघेचे समान दोन भाग करून ती
 पुढें वाढविली असतां वाढविलेला भाग व वाढविले -
 ल्या भागासहित सर्व रेघ ह्यांचा काटकोन चौकोन आ -
 णि अर्धरेघेचा वर्ग ह्यांची बेरीज अर्धी रेघ व वाढवि -
 लेला भाग ह्यांच्या बेरजेच्या वर्गाबरोबर होते.

अब रेघेचे क बिंदूत दोन समान भाग केले आहे -
 त, आणि ती ड पर्यंत वा -
 ढविली आहे, त्यास अड
 आणि बड ह्यांचा काट -
 कोन चौकोन आणि कब
 चा वर्ग ह्यांची बेरीज कड च्या वर्गाबरोबर आहे.
 म्हणजे अड० बड + कब = कड.



(१ ब्र० ४६ व्या सि० प्र०) कड रेघेवर क -
 फ चौरस कर आणि ड, ई बिंदू सांध. (१ ब्र० ३)

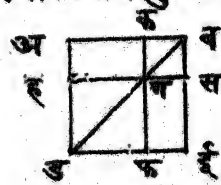
व्या सि० प्र०) बहम रेघ डफशी किंवा क ईशीं
 समांतर कर, ह बिंदूतून सलम रेघ अडशीं किं-
 वा ईफशीं समांतर कर, आणि अ बिंदूतून अस रेघ
 कलशीं किंवा ड मशीं समांतर कर. अक, कब
 बरोबर आहे, ह्या करितां (१ बू० ३६ व्या सि० प्र०)
 अल काटकोनचौकोन क ह बरोबर आहे, परंतु
 (१ बू० ४२ व्या सि० प्र०) क ह, हफ बरोबर आहे,
 ह्या करितां अल ही हफ बरोबर आहे. ह्या दोहोंम-
 ध्ये कम मिळीव. तेन्नां अम काटकोनचौकोन, क-
 मग आकृतीबरोबर झाला. अम काटकोनचौकोन
 अड आणि बड ह्या रेखांनीं झाला आहे, कारण (२
 बू० ४ व्या सि० प्र०) मड, बड बरोबर आहे.
 अड आणि बड ह्यांचा काटकोनचौकोन कमग
 आकृतीबरोबर आहे. ह्या दोन्ही पेढ्यांत लग आक-
 ति मिळीव. लग आकृति क बच्या वर्गाबरोबर आ-
 हे. ह्या करितां अड आणि बड ह्यांचा काटकोनचौ-
 कोन आणि कबचा वर्ग ह्यांची बेरीज कमग आ-
 णि लग ह्या आकृतीचे बेरेजेबरोबर आहे कमग आ-
 णि लग ह्यांची बेरीज कफ आकृति होते, व क-
 फ आकृति कडचा वर्ग आहे. ह्या करितां अड

बड काटकोनचौकोन व क ब चा वर्ग ह्यांची बेरीज कडच्या वर्गाबरोबर आहे, हें सिद्ध.

७ सिद्धांत. प्रमेय.

रेघेचे दोन भाग केले असतां सर्व रेघ आणि तिचा कोणता तरी एकभाग ह्यांच्या वर्गांची बेरीज, सर्व रेघ आणि तोच भाग ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट व दुसऱ्या भागाचा वर्ग ह्यांचे बेरजेबरोबर होतें.

अब रेघेचे क बिंदूत दोन भाग केले आहेत. त्यास अब आणि बक ह्यांच्या वर्गांची बेरीज अब आणि बक ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट आणि अकचा वर्ग ह्यांचे बेरजेबरोबर आहे.



(१ बू० ४६ व्या

सि० प्र०) अब रेघेवर अई चौरस कर, आणि सर्व आकृति मागील सिद्धांतांमध्ये केली आहे त्याप्रमाणें कर. (१ बू० ४१ व्या सि० प्र०) अग, गईबरोबर आहे. दोहांपेक्षांत कस मिळीव, तेहां अस, कई बरोबर झाला, याकरितां अस आणि

कई हे दोन काढकोनचौकोन मिळून अस काढ-
 कोनचौकोनाच्या दुप्पट आहेत, परंतु अस, आणि
 कई हे असफ आकृति व क स चौरस ह्यांबरोबर
 आहेत, ह्याकरितां अस काढकोनचौकोनाची दुप्पट
 अस फ आकृति व क स चौरस ह्यांबरोबर
 आहे. अस काढकोनचौकोन अव आणि ब क
 ह्या रेघांनीं झाला आहे, कारण (२ बू० ४ थ्या सि० कु० म०)
 ब स, व क बरोबर आहे, ह्यास्तव अव० व क काढ-
 कोनचौकोनाची दुप्पट अस फ आणि क स ह्यांब-
 रोबर आहे. दोही पेढ्यांत ह फ चौरस मिळीव ह-
 फ चौरस अ क रेघेच्या वर्गाबरोबर आहे, ह्याकरि-
 तां अस फ आकृति क स आणि ह फ हीं सर्व अव०
 व क काढकोनचौकोनाची दुप्पट आणि अ क ह्यां
 बरोबर आहेत, परंतु अस फ आणि ह फ हीं दो-
 ऩी मिळून अव ई ड आकृति होते, ह्याकरितां अ-
 व ई ड आणि क स, अव० व क काढकोनचौको-
 नाची दुप्पट आणि अ क ना वर्ग ह्यांबरोबर आहेत, परंतु
 अव ई ड आणि क स ह्या आकृति अव आणि ब-
 क ह्यांचे वर्ग आहेत, ह्याकरितां अव आणि ब-
 क ह्यांचे वर्गांची बेरीज अव० व क काढकोनचौ-
 कोनाची दुप्पट आणि अ क ह्यांबरोबर आहेत.

दुसरा प्रकार.

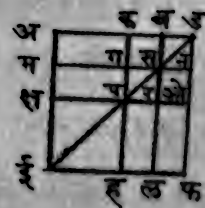
अब चावर्ग, अक आणि बक ह्या भागांचे वर्ग आणि त्यांच्याच काटकोन चौकोनाची अ ^क ब दुप्पट ह्यांबरोबर आहे, दोन्ही पेढ्यांत ब क मिळीव. तेव्हा $अब + बक = अक + २ अक + २ बक$. परंतु (२ बू. ३ या सि. प्र.) अब. बक काटकोन चौकोन अक. बक काटकोन चौकोन आणि ब क ह्यांबरोबर आहे, ह्याकरितां अक. बक काटकोन चौकोनाची दुप्पट आणि बक वर्गाची दुप्पट हीं अब. बक काटकोन चौकोनाच्या दुप्पट आहेत, ह्यास्तव अब आणि बक ह्यांच्या वर्गांची बेरीज, अब. बक काटकोन चौकोनाची दुप्पट आणि अक - चा वर्ग ह्यांबरोबर आहे, हें सिद्ध.

कु. ह्यापासून निघते, कीं दोन रेषांच्या वर्गांची बेरीज त्यांच दोन रेषांच्या काटकोन चौकोनाची दुप्पट आणि त्यांच्या वजाबाकीचा वर्ग ह्यांबरोबर असते.

८ सिद्धांत प्रमेय.

रेषेचे कसेही दोन भाग केले असतां सर्व रेषा-
णि कोणतातरी एक भाग ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची
चौपट, आणि दुसऱ्या भागाचा वर्ग, ह्यांची बेरीज सर्व
रेषा व प्रथमतः घेतलेला भाग ह्यांच्या बेरजेच्या वर्गा-
बरोबर होते.

अब एक सरळ रेषा आहे. तिचे क स्थ-
ळीं दोन भाग केले आहेत,
त्यास अब • ब क का -
टकोन चौकोनाची
चौपट आणि अक चा
वर्ग ह्यांची बेरीज अब आणि बक ह्यांच्या बेरजेच्या व-
र्गाबरोबर आहे.



अब रेषा उ पर्यंत वाढीव, अशी, कीं वड,
बक बरोबर होईल. नंतर अड रेषेवर (१ बू • ४६
व्या सि • प्र •) अई फड चौरस कर, आणि ई, ड
बिंदू सांध. नंतर (१ बू • ३१, व्या सि • प्र •) क आ-
णि ब ह्या बिंदूंतून कप ह आणि वसल ह्या दो-
न रेषा अईशी किंवा डफ शी समांतर कर, आणि

स आणि प बिंदूतून मगन आणि क्षरओ ह्या दोन रेषा अडशी किंवा ईफशी समांतर कर. क-ब, बड बरोबर आहे, आणि (१ बू० ३४ व्या सि० प्र०) कब, गस, बरोबर आहे, आणि बड, सन बरोबर आहे, ह्या करितां गस सनबरोबर आहे, ह्या रीतीनेच पर, रओ बरोबर आहे. कब, बड बरोबर आहे, आणि गस, सनबरोबर आहे, ह्या करितां (१ बू० ३६ व्या सि० प्र०) कस काटकोन चौकोन, बन काटकोन चौकोनाबरोबर आहे, व गर काटकोन चौकोन सओ काटकोन चौकोनाबरोबर आहे, परंतु कओ समांतरभुज चौकोनांत कस आणि सओ हे भरतीचे समांतरभुज चौकोन आहेत, ह्या करितां (१ बू० ४३ व्या सि० प्र०) ते परस्पर बरोबर आहेत, म्हणून बन, गर बरोबर आहे. तेव्हां हे चारही काटकोन चौकोन परस्पर बरोबर आहेत, आणि ह्या करितां हे कस काटकोन चौकोनाच्या चौपट आहेत, असें म्हणण्यास विता नाही.

कब, बड बरोबर आहे, आणि (२ बू० ४ व्या सि० प्र०) बड, बस बरोबर आहे, आणि

बस, कग बरोबर आहे, ह्या करितां कब, कग बरोबर आहे.
 कब रेषा गस बरोबर आहे, आणि गस, गप बरोबर
 आहे, ह्या करितां कब रेषा गप बरोबर आहे. कब, कग ब-
 रोबर आहे, म्हणून कग, गप बरोबर आहे, ह्या करितां अग
 काटकोन चौकोन मप काटकोन चौकोना बरोबर
 आहे. पर, रओ बरोबर आहे, ह्या करितां पल,
 रफ बरोबर आहे. मल समांतरभुज चौकोनांत
 मप आणि पल हे भरतीचे समांतरभुज चौकोन
 आहेत, म्हणून (१ ब्र० ४३ व्या सि० प्र०) ते परस्पर
 बरोबर आहेत, आणि ह्यास्तव अग, रफ बरोब-
 र आहे, ह्यावरून असें झालें कीं अग, मप, प-
 ल, आणि रफ हे चार काटकोन चौकोन परस्परां-
 शीं बरोबर आहेत, आणि हे सर्व अम काटकोन
 चौकोनाच्या चौपट आहेत. कस, बन, गर, आ-
 णि रन हे कसच्या चौपट आहेत, असें पूर्वी सि-
 द्ध केलें, ह्या करितां हे आठ काटकोन चौकोन अस
 काटकोन चौकोनाच्या चौपट आहेत, आणि ते अओह ह्या आ-
 कृती बरोबर आहेत, ह्या करितां अओह ही आकृ-
 ति अस काटकोन चौकोनाच्या चौपट आहे.

अस काटकोन चौकोन अब आणि बक

ह्या रेखांनीं झाला आहे, कारण बस, बक बरोबर आहे, पण अ ओ ह ही आकृति अस त्या चौपट आहे, असें सिद्ध केलें आहे, ह्यास्तव अब • बक काटकोनचौकोनाच्या चौपट अ ओ ह आकृति आहे. दोन्हीपेढ्यांत क्ष ह चौरस मिळीत. क्ष ह चौरस अ क च्या वर्गाबरोबर आहे, ह्या करितां अब • बक काटकोनचौकोनाची चौपट आणि अ क चा वर्ग ह्यांची बेरीज अ ओ ह आकृति आणि क्ष ह चौरस ह्यांचे बेरजेबरोबर आहे. अ ओ ह आणि क्ष ह मिळून अ ई फुड आकृति होते, आणि ती अड-चा वर्ग आहे, ह्या करितां अब • बक काटकोनचौकोनाची चौपट आणि अ क चा वर्ग, हीं अड म्हणजे अब आणि ब क ह्यांची बेरीज हिचे वर्गाबरोबर आहे, हें सिद्ध.

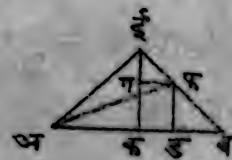
१ कु • अड, अब आणि ब क ह्यांची बेरीज आहे, आणि अ क ह्यांची वजाबाकी आहे, ह्या करितां ह्या सिद्धांतापासून असें निघते, कीं दोन रेखांचा काटकोनचौकोनाची चौपट आणि त्यांच्या वजाबाकीचा वर्ग हीं त्या दोन रेखांच्या बेरजेच्या वर्गाबरोबर असतात.

१ कु० कड चे चौरस कब चे चौरसाच्या चौ पट आहे, ह्यावरून स्पष्ट दिसून येते, कीं कोणत्याही रेघेचा वर्ग तिच्या अर्धाच्या वर्गाच्या चौपट असतो.

९ सिद्धांत. प्रमेय.

कोणत्याही रेघेचे दोन समान व दोन असमान भाग केले असता त्या दोन असमान भागांच्या वर्गांची बेरीज रेघेच्या अर्धाच्या वर्गाची दुप्पट आणि छेदन बिंदूतील अंतर ह्यांचे वर्गाची दुप्पट ह्याच्या बेरजेबरोबर होते.

अब रेघेचे क बिंदूत अक आणि बक असे दोन समान भाग केले आहेत, कड बिंदूत अड आणि बड असे दोन असमान भाग केले आहेत,



ह्यास अड आणि बड ह्या दोन भागांच्या वर्गांची बेरीज अक आणि कड ह्यांचे वर्गांच्या दुपटी बरोबर आहे, म्हणजे $अड^2 + बड^2 = २ अक^2 + २ कड^2$.

(१ बू० ११ व्या सि० प्र०) क बिंदूतून

अब रेघेवर क ई लंब काट, आणि क ई, अक
बरोबर किंवा ब क बरोबर कर. अ, ई आणि ब,
ई बिंदू सांध. (१ बू० ३१ व्या सि० प्र०) ड बिं-
दून ड फ रेघ क ई शीं समांतर काट. फ बिंदू-
तून फ ग रेघ अ ब शीं समांतर काट, आणि
अ, फ बिंदू सांध.

अक आणि क ई बरोबर आहेत, ह्या करि-
तां (१ बू० ५ व्या सि० प्र०) क अ ई कोन क-
ई अ कोनाबरोबर आहे. पण अ क ई कोन
काटकोन आहे, ह्या करितां क अ ई आणि क ई-
अ मिळून (१ बू० ३२ व्या सि० प्र०) एक काट-
कोन आहे, परंतु ते परस्परबरोबर आहेत, ह्या क-
रितां त्यांपैकीं प्रत्येक अर्धा काटकोन आहे, आणि
ह्याच कारणास्तव ब ई क आणि क ब ई ह्यांपैकी
प्रत्येक कोन अर्धा काटकोन आहे, म्हणून अ ई-
ब शिरकोन काटकोन आहे. ग फ आणि अ ब
ह्या दोन समांतर रेखांवर क ई पडते, त्यास (१
बू० २९ व्या सि० प्र०) ई ग फ बाह्यकोन ग-
क ब काटकोनाबरोबर आहे. ग ई फ अर्धाका-
टकोन आहे, आणि ई ग फ काटकोन, आहे असे

आतांच दारगविलें, ह्या करितां ई ग फ त्रिकोणाचा तिसरा
 ई फ ग हा अर्ध्या काटकोनाबरोबर आहे, ह्या करितां
 (१ बू० ६ व्या सि० प्र०) ग ई बाजू ग फ बाजू
 बरोबर आहे. फ ड ब त्रिकोणाचा फ ड ब कोन
 (१ बू० २९ व्या सि० प्र०) ग क ब काटकोनाबरो-
 बर आहे, आणि ई ब क कोन अर्ध्या काटकोन आहे,
 ह्या करितां ड फ ब कोन अर्ध्या काटकोनाबरोबर
 आहे, ह्यास्तव ड फ बाजू ड ब बाजू बरोबर आहे.
 अकरेष क ई रेघेबरोबर आहे, ह्या करितां अकै
 आणि क ई बरोबर आहेत, म्हणून अकैची दुप्पट
 अकै आणि क ई ह्यांचे बेरजे बरोबर आहे.
 अक ई कोन काटकोन आहे, ह्या करितां (१ बू०
 ४७ व्या सि० प्र०) अ ई, अकै आणि क ई ह्यां-
 चे बेरजे बरोबर आहे. परंतु अकै आणि क ई
 मिळून अकैची दुप्पट आहे, ह्या करितां अ ई,
 अकैची दुप्पट आहे. तसेंच ई ग, फ ग बरोबर
 आहे, ह्यास्तव ई ग, फ ग बरोबर आहे, म्हणून फ-
 गची दुप्पट, ई ग आणि फ ग ह्यां बरोबर आहे.
 ई ग फ कोन काटकोन आहे, ह्या करितां (१ बू०
 ४७ व्या सि० प्र०) ई फ, ई ग आणि फ ग ह्यांच्या

बेरजेबरोबर आहे. फ ग (१ बू० ३४ व्या सि० प्र०) क ड बरोबर आहे, ह्या करितां ई फे, क डे-
च्या दुप्पटीबरोबर आहे. अ ई फ कोन काटको-
न आहे, ह्या करितां अ ई आणि ई फे मिळून अ-
फे बरोबर आहेत. अ ई, अ कै ची दुप्पट आहे,
आणि ई फे, क डे ची दुप्पट आहे, ह्या करितां अ फे,
अ कै ची दुप्पट आणि क डे ची दुप्पट ह्यांच्या बे-
रजेबरोबर आहे. अ ड फ कोन काटकोन आहे,
ह्या करितां (१ बू० ४७ व्या सि० प्र०) अ फे, अ-
डे आणि फ डे ह्यांचे बेरजेबरोबर आहे, परंतु फ-
ड, ब ड बरोबर आहे, ह्या करितां अ फे, अ डे आ-
णि ब डे ह्यांचे बेरजेबरोबर आहे. अ फे, अ कै-
ची दुप्पट आणि क डे ची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेब-
रोबर आहे, म्हणून अ डे आणि ब डे मिळून
अ कै ची दुप्पट आणि क डे ची दुप्पट ह्यांचे बेरजे
बरोबर आहे, हे सिद्ध.

१० सिद्धांत प्रमेय.

एके रेघेचे दोन समान भाग करून ती पुढे वाढ-
विली असतां एकंदर रेघेचा वर्ग आणि वाढविलेल्या

कोनांपेक्षां कमी आहेत हे स्पष्ट आहे. (१ बू०
२९ व्या सि० १ कु० प्र०) ई ब आणि फ ड ह्या दो-
न रेखा पुरते पणीं वाढविल्या असतां मिळतील.
त्या ग बिंदूत मिळतात असें मानूं. अ, ग बिंदूसां-
ध.

अक, कई बरोबर आहे, ह्या करितां (१ बू०
५ व्या सि० प्र०) क अ ई कोन कई अ कोनाब-
रोबर आहे, पण अ कई कोन काटकोन आहे, ह्या
करितां (१ बू० ३२ व्या सि० प्र०) क अ ई आणि
अ ई क ह्या दोन कोनांपैकीं प्रत्येक कोन अर्धाकाट-
कोनाबरोबर आहे. ह्या प्रमाणेंच क व ई कोन व क-
ई ब कोन हे प्रत्येक अर्धाकाटकोनाबरोबर आ-
हेत, ह्यास्तब अ ई ब शिरकोन काटकोन आहे.
ई ग आणि क ड ह्या दोन रेखा परस्परांस छेदिता-
त, तेव्हां (१ बू० १५ व्या सि० प्र०) ई ब क को-
न ड ब ग कोनाबरोबर आहे, परंतु ई ब क
कोन अर्धाकाटकोन आहे, ह्याकरितां ड ब ग को-
न अर्धाकाटकोन आहे. कई आणि फ ग ह्या
दोन रेखांस क ड रेखा छेदिते, त्यास (१ बू० २९
व्या सि० प्र०) ई क ड कोन क ड ग सुलभ

कोनाबरोबर आहे, ह्यास्तव ड ग ब कोन अर्ध्या
 काटकोनाबरोबर आहे, म्हणून (१ बू० ६ व्या सि०
 प्र०) ब ड बाजू ग ड बाजूबरोबर आहे. ई क-
 ड फ समांतर भुज चौकोनांत क कोन काटकोन
 आहे, ह्या करितां त्या समोरील कोन ई फ ड (१
 बू० ३४ व्या सि० प्र०) काटकोन आहे. ई फ ग
 त्रिकोणाचा फ कोन काटकोन आहे, व फ ग ई
 कोन अर्धा काटकोन आहे, ह्या करितां फ ई ग कोन
 अर्धांतच अर्ध्या काटकोनाबरोबर आहे, ह्यास्तव (१
 बू० ६ व्या सि० प्र०) क ई बाजू फ ग बाजूबरो-
 बर आहे. अ क बाजू क ई बाजूबरोबर आहे, म्ह-
 णून अ क ई, क ई बरोबर आहे, म्हणून अ क ई आ-
 णि क ई मिकून अ क ई ची दुप्पट आहेत. अ क-
 ई कोन काटकोन आहे, ह्या करितां (१ बू० ४७ व्या
 सि० प्र०) अ क ई आणि क ई ह्यांची बेरीज अ ई
 बरोबर आहे, परंतु अ क ई आणि क ई, अ क
 ची दुप्पट आहेत, ह्या करितां अ ई, अ क ची दु-
 प्पट आहे. फ ई, फ ग बरोबर आहे, ह्या करितां
 फ ई फ ग बरोबर आहे, म्हणून फ ई आणि
 फ ग, फ ई ची दुप्पट आहेत. ई फ ग कोन काट-

कोन आहे, त्या करितां (१ बू० ४७ व्या सि० प्र०) ई गै, फ ई आणि फ गै ह्यां बरोबर आहे. फ ई आणि फ गै, ई फे ची दुप्पट आहे - त, त्या करितां ई गै, ई फे ची दुप्पट आहे, फ ई आणि कड बरोबर आहेत, त्या करितां ई गै, कडे च्या दुप्पट आहे. अ ई ग काटकोन आहे, म्हणून अ गै, ई अ आणि ई गै ह्यांच्या बेरजे बरोबर आहे. अ ई, अ के च्या दुप्पट आहे, आणि ई गै, कडे च्या दुप्पट आहे, त्या करितां अ गै, अ क आणि कड ह्यांच्या वर्गांच्या दुप्पट आहे. अ गै, अ ड आणि ग ड ह्यांच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर आहे, व ब ड, ग ड बरोबर आहे, त्या करितां अ ग चा वर्ग अ ड आणि ब ड ह्यांच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर आहे, परंतु अ ग चा वर्ग अ क आणि कड ह्यांच्या वर्गांच्या दुप्पटी बरोबर आहे, असें सिद्ध केले आहे, त्या करितां अ ड आणि ब ड ह्यांचे वर्ग अ क आणि कड ह्यांच्या वर्गांच्या दुप्पटी बरोबर आहेत हे सिद्ध.

टीप हा व ह्यांच्या मागील सिद्धांत ह्यांची सामान्य

प्रतिज्ञा अशी लिहिली असतां चालेल - रेघेचे दोन समान व बाहेरील किंवा आतील अंगांनं दोन असमान असे खंड केले असतां दोन असमान खंडांच्या वर्गांची बेरीज रेघेच्या अर्धाचा वर्ग व मध्यांतराचा वर्ग ह्यांच्या बेरजेचे दुप्पटी बरोबर होते.

११ सिद्धांत. कृत्य.

विवक्षित रेघस मध्यप्रमाणानें छेदावयाचें.

अब एक रेघ आहे, तीस मध्यप्रमाणानें

छेदावयाचें आहे, त्यास

अब रेघेवर (१ बू० ४६

व्या सि० प्र०) अक -

डब चौरस काढ, (१ बू०

४० व्या सि० प्र०) अक रेघेचे ई स्थळीं दोन

समानभाग कर, आणि ई, ब बिंदू सांध. क अ रेखन

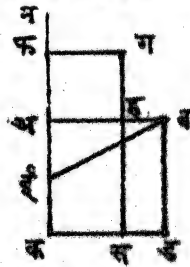
पर्यंत वाढीव, आणि (१ बू० २ व्या सि० प्र०) ईन -

चा ई ब बरोबर ई फ तुकडा कर. अ फ वर

अ फ ग ह चौरस कर. अब रेघ ह स्थळीं

मध्यप्रमाणानें छेदली आहे, म्हणजे अब आणि

ब ह ह्यांचा काढकोन चौकोन अ ह वे वर्गाबरोबर



होईल. गह रेघ स पर्यंत वाढीव.

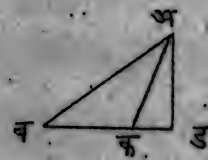
अकचे ई स्थळां दोन समानभाग केलेआ-
हेत, व ती फ बिंदूपर्यंत वाढविली आहे, म्हणून (२
बू० ६ सि० प्र०) फई चा वर्ग कफ आणि फअ
ह्यांचा काटकोनचौकोन व अई चा वर्ग ह्यांच्या बेरजे
बरोबर आहे. फई, बई बरोबर केली आहे, ह्या-
करितां बई चाही वर्ग कफ आणि फअ ह्यांचा
काटकोनचौकोन, व अई चा वर्ग ह्यांबरोबर आ-
हे. (१ बू० ४७ व्या सि० प्र०) बई चा वर्ग अ-
बै आणि अई ह्यांच्या बेरजे बरोबर आहे, ह्यास्त-
व अबै आणि अई हे कफ आणि फअ ह्यांचा का-
टकोनचौकोन व अई ह्यांबरोबर आहेत. अई
दोन्ही पेढ्यांस साधारण आहे, ह्याकरितां काढून वा-
क, तेव्हां अबै, कफ आणि फअ ह्यांच्या काट-
कोनचौकोनाबरोबर आहे. अबचा वर्ग अड
चौरस आहे, आणि कफ आणि अफ ह्यांचा
काटकोनचौकोन फस आहे, कारण फग, अ-
फ बरोबर आहे. दोन्ही पेढ्यांत असकाटकोन-
चौकोन साधारण आहे, ह्या काढून दाखिला अ-
सतां हड काटकोन चौकोन फह चौरसाबरोबर

होईल. हड काटकोनचौकोन अब आणि ह
 व घारेघांनी झाला आहे, कारण अब, बड
 वरोबर आहे; व फह, अह चा वर्ग आहे, ह्या
 करितां अबरेष ह स्थळीं मध्यप्रमाणानें छेदली
 असे.

१२ सिद्धांत प्रमेय.

विशालकोण त्रिकोणांत विशालकोना समो-
 रचे बाजूचा वर्ग, विशालकोनाजवळच्या बाजूच्या व-
 र्गापेक्षां त्या त्रिकोणाच्या एका लघुकोनापासून त्या-
 च्या समोरील बाजू वाढवून तीवर लंब केला अस-
 तां तो लंब व विशालकोन ह्यांच्या मधील अंतर व
 जी बाजू वाढविली ती ह्यांच्या काटकोनचौकोना-
 च्या दुपटीनें मोठा असतो.

अबक त्रिकोणांत बक अ कोन विशाल
 आहे, आणि त्याच्या अ लघुकोनापासून त्याच्या
 समोरील बक बाजू वा-
 ढवून तीवर अड लंब
 केला आहे, त्यास विशाल
 कोना समोरील अब बाजू



चा वर्ग ब क आणि अ क ह्यांच्या वर्गापेक्षा क -
ब आणि क ड ह्यांचा काटकोनचौकोनाच्या दुप्पटी-
ने मोठा आहे.

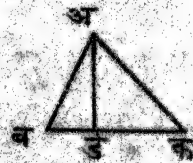
ब ड रेचेचे क स्थळीं दोन भाग झाले आहेत,
ह्या करितां (२ बू० ४ थ्या सि० प्र०) ब ड चा वर्ग
ब क आणि क ड ह्या दोन रेखांचे वर्ग आणि त्या-
च्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यां बरोबर आहे.
दोन्ही पेक्षांत अ ड चा वर्ग मिळीव, तेव्हां ब ड
आणि अ ड ह्यांच्या वर्गांची बेरीज, ब क, क ड
आणि अ ड ह्यांच्या वर्गांची बेरीज व ब क आणि
ड क ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यां बरो-
बर आहे. अ ड आणि ब ड ह्यांच्या वर्गांची बे-
रीज (१ बू० ४० व्या सि० प्र०) अब्बे बरोबर
आहे, व क ड आणि अ ड ह्यांच्या वर्गांची बेरीज
अ क च्या वर्गाबरोबर आहे, म्हणून अब्बे, अ
के, ब के आणि ब क आणि क ड ह्यांच्या काट-
कोनचौकोनाची दुप्पट, ह्यां बरोबर आहे. म्हणजे
अबे, ब क आणि अ क ह्यांच्या वर्गापेक्षा ब क
क ड काटकोनचौकोनाच्या दुप्पटीने मोठा आहे.

१३ सिद्धांत. प्रमेय.

त्रिकोणांत लघुकोना समोरील बाजूचा वर्ग त्याचे जवळच्या दोन बाजूंच्या वर्गांपेक्षा, त्याबाजूंपैकी कोणत्याही बाजूवर तिच्या समोरील कोनापासून लंब काढला असता, तो लंब आणि लघुकोन ह्यांच्या मधील अंतर व ती बाजू ह्यांच्या काटकोन चौकोनाच्या दुपटीने लहान असतो.

अबक एक त्रिकोण आहे. त्याचा ब कोन लघु आहे, व अ कोनापासून (१ बु. १२ व्या सि. नं०) अदु रेघ बक

वर लंब काढली आहे. त्यास ब कोना समोरचे



अक बाजूचा वर्ग अ-

ब आणि बक ह्या बाजूंच्या वर्गांपेक्षा बक आणि बडु ह्यांच्या काटकोन चौकोनाच्या दुपटीने कमी आहे.

अडु लंब प्रथमतः अबक त्रिकोणांत पडतो असें मानूं. बक रेघेचे ड स्थळीं बडु आणि कडु असे दोन भाग शाले आहेत, ह्या कारितां (२ बु.

७ व्या सि० प्र०) ब क आणि ब ड ह्यांचे वर्ग ब क आणि ब ड ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट आणि क ड चा वर्ग ह्यांबरोबर आहेत. ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेश्यांत अड्डे मिळीव, तेव्हा ब क, ब ड, आणि अड्ड ह्यांच्या वर्गांची बेरीज ब क व ब ड ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट व क ड आणि अड्ड ह्यांचे वर्ग ह्यांबरोबर आहे. अड्ड, ब क व लंब आहे, ह्या करितां (१ बू० ४७ व्या सि० प्र०) ब ड आणि अड्ड ह्यांच्या वर्गांची बेरीज अ ब च्या वर्गाबरोबर आहे, व अड्ड आणि क ड ह्यांच्या वर्गांची बेरीज अ क च्या वर्गाबरोबर आहे, त्यास ब क चा वर्ग आणि अ ब चा वर्ग मिळून, अ क चा वर्ग व ब क आणि ब ड ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यांबरोबर आहेत, म्हणजे अ क चा वर्ग अ ब आणि ब क ह्यांच्या वर्गांपेक्षां ब क आणि ब ड ह्यांच्या काटकोनचौकोनाच्या दुप्पटीनें कमी आहे.

आतां अड्ड लंब अ ब क त्रिकोणाच्या बाहेर पडतो असें मानू. ड कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां (१ बू० १६ व्या सि० प्र०) अ क व कोन विशाळ

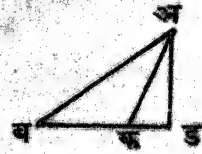
आहे, आणि ह्यास्तव (२ बू० १२ व्या सि० प्र०) अब-
चा वर्ग अक आणि कव ह्यांच्या वर्गांची बेरीज, व
बक आणि कड ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्प-

ट ह्यांबरोबर आहे. ह्या

समीकरणाच्या दोन्ही पे-

ल्यांत बक चा वर्ग मि-

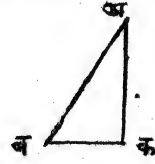
ळीव, तेव्हां अबे आणि



बके हे अके, बक आणि कड ह्यांच्या काटकोन
चौकोनाची दुप्पट, आणि बक वर्गाची दुप्पट ह्यां-
बरोबर आहेत. बड रेघेचे क स्थळीं दोन भाग
झाले आहेत, त्यास कड आणि बक ह्यांचा काट-
कोनचौकोन, व बक चा वर्ग (२ बू० ३ व्या सि०
प्र०) बक आणि बड ह्यांच्या काटकोनचौकोना
बरोबर आहेत, म्हणून बड आणि बक ह्यांच्या
काटकोनचौकोनाची दुप्पट, बक आणि कड
ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट, व बक च्या व-
र्गाची दुप्पट ह्यांबरोबर आहे, ह्यास्तव अब आ-
णि बक ह्यांचे वर्गांची बेरीज अक चा वर्ग, व
बड आणि बक ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्प-
ट ह्यांबरोबर आहेत, ह्यास्तव अक चा वर्ग अब

आणि बक ह्यांच्या वर्गापेक्षां बड आणि बक ह्यांच्या काटकोनचौकोनाच्या दुपटीनें कमी आहे, हें सिद्ध.

आतां असें मात्र, कीं अक, बक वर लंब आहे. ह्यापशीं बक व ब कोन आणि लंब ह्यांचे मधील अंतर पडेल, ह्या स्तव अब आणि बक ह्यांचे वर्ग (१ बू० ४७ व्या सि० प्र०) अकचा वर्ग आणि बकच्या वर्गाची दुप्पट ह्यां बरोबर आहेत, हें स्पष्ट आहे.



१४ सिद्धांत. कृत्य.

विवक्षित सरलरेषाकृती बरोबर चौरस करावयाचे.

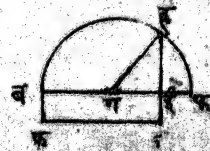
अ एक आकृति आहे, त्यास ती बरोबर एक चौरस करावयाचे.

(१ बू० ४५ व्या सि०

प्र०) अ आकृती

बरोबर बकड ई

काटकोनचौकोन कर. ब ई बाजू फ पर्यंत वाढीव.



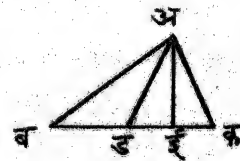
अशी कीं ईफ, ईड बरोबर होईल. बफ चे ग
स्थळीं होन समान भाग कर. ग मध्य कल्पून गफ
त्रिज्येनें बहफ अर्धवर्तुळ कर. उई वाजू ह पर्ये-
त वाटीव, आणि ग, ह संध. बफ रवेचे बग
आणि गफ हे दोन समान भाग आहेत, व बई
आणि ईफ हे दोन असमान भाग आहेत, त्यास
(२ बू० ५ व्या सि० प्र०) बई० ईफ काटकोन
चौकोन व गईचा वर्ग फग वर्गाबरोबर आहेत.
परंतु फग, गह बरोबर आहे, कारण त्या दोन्ही
रेषा त्रिज्या आहेत, ह्यास्तव बई० ईफ काटकोन -
चौकोन व गईचा वर्ग हे गह बरोबर आहेत. ग-
ईह कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां (१ बू० ४७ व्या
सि० प्र०) ईमो आणि ईह हे गह बरोबर आ-
हेत, ह्यास्तव बई० ईफ काटकोन चौकोन व ग-
ई हे ईमो आणि ईह ह्यां बरोबर आहेत. त्या दोन्ही-
पेढ्यांतून गई काढला असतां बई० ईफ
काटकोन चौकोन ईह वर्गाबरोबर राहील, परंतु
बई० ईफ काटकोन चौकोन बड काटकोन -
चौकोनाबरोबर आहे, कारण ईफ, ईड बरो-
बर आहे, आणि बड काटकोन चौकोन अभाकती-

बरोबर आहे, ह्या करितां अ आकृति ई ह रेघेचे वर्गाबरोबर आहे. ई ह रेघेवर चौरस काढलें म्हणजे तें अ आकृतीबरोबर होईल.

अ सिद्धांत प्रमेय.

त्रिकोणाच्या कोणत्याही बाजूचे दोन समान भाग केले असतां त्या बाजूच्या अर्धाच्या वर्गाची दुप्पट व त्या बाजूचा मध्य व ती समोरील कोन ह्यांस सांधणाऱ्या रेघेच्या वर्गाची दुप्पट ह्यांची बेरीज इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर असते.

अबक त्रिकोणाच्या बक बाजूचे ड स्थळीं दोन समान भाग केले आहेत, त्यास बड च्या वर्गाची दुप्पट व ड बिंदु व अ कोन ह्यांस सांधणारी जी अड रेघ तिच्या वर्गाची दुप्पट हीं अब आणि अक ह्यांच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर आहेत.



अ बिंदूंतून अई रेघ बक-वर लंब कर. (१ बू० ४७ व्या सि० प्र०) अब, अई

आणि बऱ्हे ह्यांच्या वर्गाबरोबर आहे, तसाच अकै,
 अऱ्हे आणि कऱ्हे ह्यांच्या वर्गाबरोबर आहे. दोन्ही
 समीकरणांची बेरीज घेतली असतां अब आणि
 अक ह्यांच्या वर्गांची बेरीज बऱ्हे, कऱ्हे आणि अ-
 ऱ्हेच्या वर्गांची दुप्पट ह्यांबरोबर होते. बक रेघेचे
 उ स्थळीं दोन समान भाग झाले आहेत, व ऱ्हे स्थ-
 लीं दोन असमान भाग झाले आहेत, ह्याकरितां (२ बू०
 ९ व्या सि० प्र०) बऱ्हे व कऱ्हे ह्यांची बेरीज ब-
 ड वर्गांची दुप्पट व उऱ्हे वर्गांची दुप्पट ह्यांबरोबर
 आहे, ह्याकरितां अब आणि अक ह्यांच्या वर्गांची
 बेरीज बडै, उऱ्हे आणि अऱ्हे ह्यांच्या दुपटीबरो-
 बर आहे, परंतु उऱ्हे वर्गांची दुप्पट आणि अऱ्हे
 वर्गांची दुप्पट मिळून (१ बू० ४७ व्या सि० प्र०)
 अड वर्गाच्या दुपटीबरोबर आहे, ह्याकरितां अ-
 ब आणि अक ह्यांच्या वर्गांची बेरीज बडुआणि
 अड ह्यांच्या वर्गाच्या दुपटीबरोबर आहे, हे सिद्ध.

ब सिद्धांत प्रमेय.

समांतरभुजचौकोनांत कर्णांच्या वर्गांची बेरीज समांतरभुजचौकोनाच्या चार बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर असते.

अबकड एक समांतरभुजचौकोन आहे, त्यास त्याच्या अक आणि बड कर्णांच्या वर्गांची बेरीज अड, कड, बक आणि अब ह्या चार बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर आहे, हे सिद्ध करावयाचे.



अक आणि बड कर्णांच्या वर्गांच्या स्थितीं परस्परान्त छेदितान, असें मानूं. (१ बू० १५ व्या सि० प्र०) अईड कोन बईक कोनाबरोबर आहे, अडई आणि डबक हे व्युत्क्रम कोन (१ बू० २९ व्या सि० प्र०) बरोबर आहेत, व (१ बू० ३४ व्या सि० प्र०) अड बाजू, बक बाजूबरोबर आहे, ह्या करितां (१ बू० २६ व्या सि० प्र०) अईड आणि बईक हे दोन त्रिकोण परस्पर

बरोबर आहेत, म्हणून अई बाजू, ई क बाजू
बरोबर आहे, व ब ई बाजू, ई ड बाजू बरो-
बर आहे.

अक बाजूचे ई स्थळीं समान दोन
भाग झाले आहेत, ह्या करितां (२ बु० अ सि०
प्र०) अब चा वर्ग आणि बक चा वर्ग ह्यांची
बेरीज, ब ई वर्गाची दुप्पट, व अ ई वर्गाची दु-
प्पट ह्यां बरोबर आहे. तसेंच अ ड आणि क ड
ह्यांची बेरीज अ ई वर्गाची दुप्पट, व ब ई वर्गा-
ची दुप्पट ह्यां बरोबर आहे, कारण ब ई, ई ड
बरोबर आहे. ह्या दोन्ही समीकरणांची बेरीज घे-
तली असतां अब, बक, क ड, आणि अ ड ह्या सर्वां-
ची बेरीज अ ई वर्गाची चौपट, व ब ई वर्गाची चौपट ह्यां
बरोबर होते, परंतु अ ई, अक चे अर्ध आहे,
व ब ई, बड चे अर्ध आहे, ह्या करितां (२ बु०
अ सि० २ कु० प्र०) ब ई वर्गाची चौपट, व
अ ई वर्गाची चौपट अनुक्रमे ब ड आणि अ-
क ह्यां बरोबर आहे. ह्यास्तव अब, बक, क-
ड आणि अ ड ह्या बाजूंच्या वर्गांची बेरीज
अक आणि बड कर्ण रेखांच्या वर्गांच्या बेरीजे

बरोबर आहे हें सिद्ध.

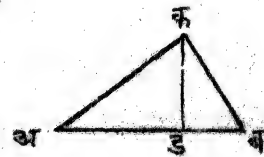
१ कु. समांतर भुज-बौकोनांत कर्ण रेषा पर-
स्परान्ते समान दोन दोन भाग करतात.

क सिद्धांत प्रमेय.

त्रिकोणांत शिरकोनापासून पायावर लंब
केला असता त्याचे जे दोन भाग होतात, त्यांच्या
वर्गांची वजाबाकी दुसऱ्या दोन बाजूंच्या वर्गांच्या
वजाबाकी बरोबर असते.

अबक एक त्रिकोण आहे, त्याच्या क
शिरकोनापासून अब पायावर कडु लं -
ब केला आहे, त्यास अ-

ड आणि बड ह्या दोन
भागांच्या वर्गांची वजा-
बाकी अक आणि ब-



क ह्या दोन बाजूंच्या वर्गांच्या वजाबाकी बरोबर
आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

(१ बू. ४७ व्या सि. प्र.) अकै = अडे
+ डकै आणि बकै = बडै + डकै ह्या दोन स.
मीकरणांची वजाबाकी कर, म्हणजे अकै-ब-

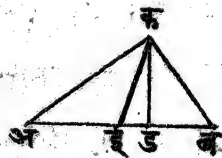
कै = अडै - बडै हें सिद्ध.

१) कु० त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची बेरीज व त्यांची वजाबाकी ह्यांचा काटकोन चौकोन शिखोनापासून पायावर लंब केला असता तो ज्या ठिकाणी पायास छेदितो, ते स्थान व पायाचा मध्य, ह्यांच्या मधील अंतर आणि पाया ह्यांच्या काटकोन चौकोनाच्या दुपटी बरोबर असतो.

अब पायाचे ई

स्थळीं दोन समान भाग

केले आहेत, त्यास (अ-



क + बक) × (अ-

क - बक) = २अब • ईड, हें सिद्ध करावयाने.

अकै - बकै = अडै - बडै. (२१

१ व्या सि० कु० प्र०) (अक + बक) (अ

क - बक) = (अड + बड) (अड

- बड), परंतु (अड + बड) = अब

आणि (अड - बड) = २ईड, ह्याकरितां

(अड + बड) (अड - बड) = २अ

ब • ईड, म्हणून (अक + बक) × (अ

क - ब क) = २ अब • ई ड.

१ कु० विवक्षित रेखेमध्ये एक बिंदु घेऊन त्या-
तून तीवर लंब काढून त्यामध्ये जितके पाहिजे इत-
के बिंदु घेऊन त्यापासून विवक्षित रेखेच्या दोकांप-
र्यंत रेखा काढल्या असता त्या रेखांच्या (म्हणजे लं-
बांतील बिंदूतून विवक्षित रेखेच्या दोकांपर्यंत काढले-
ल्या दोन दोन रेखा त्यांच्या) वर्गांचीं अंतरें सार-
खीं भरतात.

कारण, हीं सर्व अंतरें विवक्षित रेखेच्या खंडां-
च्या वर्गांच्या अंतराबरोबर आहेत.

२ कु० विवक्षित रेखेचे अंगास एक बिंदु घेऊन त्या
पासून तिचे दोकांपर्यंत रेखा काढल्या असता त्या
दोन रेखांच्या वर्गांचें अंतर जर ह्या प्रमाणेंच दुसरा
एक बिंदु घेऊन त्यापासून विवक्षित रेखेच्या दोकांपर्य-
ंत दोन काढलेल्या रेखांच्या वर्गांच्या अंतराबरोबर
होईल, तर त्या दोन बिंदूंस सांधणारी रेखा ही बिंदु
विवक्षित रेखेचे दोन समान भाग करणाऱ्या लंबा-
च्या एके अंगास असल्यास तीवर लंब होते.

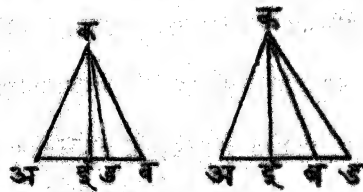
कारण ह्या दोन बिंदूंपासून विवक्षित रेखेवर
लंब काढले असता तिचे जे खंड पडतील ते

बरोबरच होतील, म्हणजे ते दोन लंब परस्पर तशीं मिळतील.

३ सिद्धांत प्रमेय.

समदिभुज त्रिकोणांत शिरकोनापासून पायावर रेषा काढली असतां (ती रेषा पायाचे खंड आं-
तल्या अंगांनें करो किंवा बाहेरच्या अंगांनें करो) पा-
याचे जे दोन खंड होतात त्यांचा काटकोन चौकोन
ती रेषा व त्या त्रिकोणाची कोणतीही एक बाजू त्यां-
च्या वर्गाच्या वजाबाकी बरोबर होतो.

अबक एक समदिभुज त्रिकोण आहे. त्याच्या
शिरापासून पायास
छेदणारी अशी क-
ड रेषा काढली आहे,
त्यास अड आणि



बड त्या खंडांचा काटकोन चौकोन अक आणि
कड त्यांच्या वर्गाच्या वजाबाकी बरोबर आहे, हे
सिद्ध करावयाचे.

क बिंदूपासून कड रेषा अबवर लंब
कर. (पहिले आकृतीविषयी विचार) (२ चूक

सि० प्र०) अकै - कडै = अई - ईडै
 = (२बू० ५ व्या सि० कु० प्र०) (अई + ई

ड) (अई - ईड) = अड० डब

कारण अई + ईड = बई - ईड = डब.

(दुसरे आकृतीविषयीं विचार करूं.) (२बू०

क सि० प्र०) कडै - अकै = ईडै - अई

(२बू० ५ व्या सि० कु० प्र०) (ईड + अई)

(ईड - अई) = अड० डब कारण ई

ड - अई = ईड - ईब = डब.

१ कु० धनचिन्ह पहिल्या आकृतीविषयीं व ऋ-
 णचिन्ह दुसरे आकृतीविषयीं समजलें असतां अ
 कै = कडै ± अब० डब असें लिहिलें असतां
 चालेल.

कारण पहिल्या आकृतीमध्ये अकै - क
 डै = अड० डब, ह्या करितां दोन्ही पेढ्यांत कडै
 मिळविला असतां अकै = कडै + अड० ड
 ब असें होतें. दुसरे आकृतींत कडै - अकै
 = अड० डब, ह्या करितां दोन्ही पेढ्यांत अडै
 मिळविला, आणि अड० डब काटकोनचौकोन
 बजा केला, तर अकै = कडै - अड० डब

असें येते.

२ कु० दोन विषम रेखांच्या अंतराचे अर्ध त्यांच्या बेरजेच्या अर्धात मिळविलें असतां मोठी रेखा येते, आणि तें वजा केलें असतां लहान रेखा येते.

कारण, अड आणि डब (पहिल्या आकृतीकडे पहा.) ह्या विषम रेखा आहेत, अई त्यांच्या बेरजेचें अर्ध आहे, आणि ईड त्यांच्या वजाबाकीचें अर्ध आहे. आतां $अई + ईड = अड$ आणि $अई - ईड = डब$ हे उघड आहे.

दुसऱ्या बुकांतील प्रश्न.

१ चतुष्कोणाकृतीचे सर्व कोनांची बेरीज चार काटकोनां बरोबर असते.

२ कोणत्याही चौकानाच्या समोरासमोरच्या बाजू किंवा समोरासमोरचे कोन बरोबर असल्यास तो चौकोन समांतरभुजचौकोन असतो.

३ विनक्षित दोन चौरसांचे वजाबाकी बरोबर जिचा वर्ग होईल अशी रेघ काढावयाची.

४ कितीही रेघा असल्या तरी त्यांच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर जिचा वर्ग होईल अशी रेघ काढावयाची.

५ समांतरभुजचौकोनाच्या कोणत्याही बाजूंत एक बिंदु घेऊन त्यांतून अशी एक रेघ काढावयाची आहे, की तिच्या योगाने त्या समांतरभुजचौकोनाचे दोन समान भाग पडतील.

६ काटकोनचौकोनांत एक बिंदु घेऊन त्यापासून सर्व काटकोनांपर्यंत रेघा काढल्या असतां समोरासमोरच्या काटकोनांपर्यंत ज्या रेघा काढल्या आहेत त्यांच्या वर्गांच्या बेरजा परस्पर

बरोबर होतील.

७ विवक्षित त्रिकोणाच्या कोणत्याही एका बाजूंत एक बिंदु घेऊन त्यापासून एक रेषा काढून तिने त्या त्रिकोणाचे दोन समान भाग करावयाचे.

८ काटकोन त्रिकोणांत काटकोन ज्या बाजूच्या मध्ये असतो त्यांपैकी कोणतेही एके बाजूचा वर्ग, कर्ण आणि दुसरी बाजू ह्यांची बेरीज व बजावाकी ह्यांच्या काटकोन चौकोना बरोबर असतो.

९ एक बिंदूत तीन रेषांनी परस्परांस छेदले असतां जे साहा कोन पडतात ते जर बरोबर असले तर कोणत्याही एका बिंदूपासून त्या तिन्ही रेषांवर लंब केले असतां त्यांतील मोठा लंब दुसऱ्या दोन लंबांच्या बेरजे बरोबर असतो.

१० काटकोन त्रिकोणांत काटकोनापासून कर्णावर लंब केला असतां जे दोन खंड होतात त्यांचा काटकोन चौकोन त्या लंबाच्या वर्गाबरोबर असतो.

११ एक विवक्षित बिंदू व तीन विवक्षित रेषा आहेत, आणि त्या तीन रेषांपैकीं दोन परस्परांशीं समांतर

आहेत, त्यास त्या दोन समांतर रेखांमध्ये एक एक असा बिंदु काढावयाचा आहे, कीं ते दोन बिंदु विवक्षित बिंदूपासून समान अंतरावर होतील, व त्यांस सांधणारी रेखा तिसऱ्या विवक्षित रेखाशी समांतर होईल.

१२ त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंच्या मध्यांस सांधणारी रेखा तिसऱ्या बाजूशी समांतर असते, व तिच्या अर्धाबरोबर असते.

१३ चतुष्कोनाच्या बाजूंचे मध्यबिंदु अनुक्रमानें सांधले असतां जो चतुष्कोन होतो त्याच्या समोरा समोरच्या बाजू समांतर होतात.

१४ दोन विवक्षित रेखा आहेत, त्यांपैकी एकीचे असे दोन भाग करावयाचे, कीं त्या भागांपैकीं एक भाग व दुसरी रेखा त्यांचा काढकोनचौकोन दुसऱ्या भागाच्या वर्गाबरोबर होईल.

१५ दोन विवक्षित रेखांपैकीं एक रेखा इतकी वाढवावयाची आहे, कीं वाढविलेल्या भागाचा वर्ग ती रेखा व दुसरी रेखा त्यांच्या काढकोनचौकोनाबरोबर होईल.

१६ त्रिकोणाच्या पायावर समांतर भुज चौकोन काढला, आणि त्याच्या दुसऱ्या दोन बाजूंवर त्या

समोरच्या ज्यांच्या बाजू पायावरील समांतरभुज चौकोनाच्या टोंकांतून जातील असे दोन समांतर भुजचौकोन काढिले, आणि जर बाजूंवरील समांतर भुजचौकोन त्रिकोणाच्या बाहेर असले तर त्यांची बेरीज पायावरील समांतर भुज चौकोनाबरोबर होईल, आणि बाजूंवरील समांतर भुज चौकोनांपैकी एक समांतरभुजचौकोन त्रिकोणावर पडला तर त्यांची वजाबाकी पायावरील समांतरभुजचौकोनाबरोबर होईल.

१७ चतुष्कोणाकृतीच्या चार बाजूंच्या वर्गांची बेरीज त्या आकृतीच्या कर्णांचे वर्ग व त्या कर्णांच्या मध्यांस सांधणाऱ्या रेषेच्या वर्गाची चौपट ह्यांचे बेरजेबरोबर असते.

१८ चतुष्कोणाकृतीच्या कोणत्याही समोरा समोरच्या दोन बाजूंचे वर्ग आणि त्यांचे मध्यसांधणाऱ्या रेषेच्या वर्गाची चौपट ह्यांची बेरीज दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्ग आणि कर्णांचे वर्ग ह्यांच्या बेरजेबरोबर असते.

१९ दोन रेषांची बेरीज व वजाबाकी ह्यांचे वर्गांची बेरीज त्या दोन रेषांच्या वर्गांच्या दुपटीबरोबर

असने.

२० कोणतीही रेघ मध्यप्रमाणानें छेदली असतां जे तिचे दोन खंड पडतात त्यांपैकीं मोठा खंड व ती सर्व रेघ हीं सांधलीं असतां जी रेघ होईल ती सांध्याच्या जागीं मध्यप्रमाणानें छेदली जाईल.

२१ चतुष्कोणाकृतीच्या कर्णरेखांच्या वर्गांची बेरीज त्या आकृतीच्या समोरा समोरच्या बाजूंच्या मध्यांस सांधणाऱ्या रेखांच्या वर्गांच्या दुपटीबरोबर असते.

२२ त्रिकोणाच्या तिर्यक् कोनाचे कितीही समान भाग केले असतां त्या समान भाग करणाऱ्या रेखांनीं त्या कोना समोरील बाजूचे जे भाग होतात ते असमान होतात, आणि त्या कोनापासून लंब केला असतां लंबाच्या समीप तर जो भाग असतो तो दूरतर भागापेक्षां लहान होतो.

तिसरें बूक.

व्याख्या.

१ वर्तुळाचे परिघाचे भागास वर्तुळाचा कोंस असें म्हणतात.

२ कोंसाचे टोंकांस सांधणाऱ्या रेषेस ज्या असें म्हणतात.

३ अर्धवर्तुळाच्या कोंसास परिध्यर्ध म्हणतात.

४ कोंस आणि त्याचीं टोंकें सांधणारी रेषा यांच्या मध्ये जो वर्तुळाचा भाग सांपडतो त्यास वर्तुळखंड म्हणतात.



५ कोंसामध्ये एक बिंदु घेऊन त्यापासून कोंसाच्या टोंकांस सांधणाऱ्या रेषेच्या टोंकांपर्यंत दोन रेषा केल्या असतां जो कोन होतो त्यास वर्तुळखंडांतील कोन असें म्हणतात.

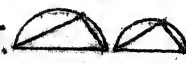


६ कोंसासमोर जो कोन असतो तो कोंसावर आहे असें म्हणतात.

७ दोन त्रिज्या आणि त्यांच्या टोंकांच्या मधल्या कोंस त्यांच्यामध्ये जो वर्तुळाचा भाग सांपडतो त्यास वर्तुळाचा सेकतोर



असें म्हणतात.


८ वर्तुळाच्या ज्या खंडांत समान कोन असता-
त त्यांस सजातीय वर्तुळखंड असें म्हणतात. 

९ ज्या कोंसां समोर समानमध्य कोण असतात
त्यांस सजातीय कोंस असें म्हणतात.

१० ज्या सेकतारांतील कोंस सजातीय असतात
त्यांस सजातीय सेकतोर असें म्हणतात.

११ ज्या वर्तुळांच्या त्रिज्या समान असतात त्यांस
समानवर्तुळे असें म्हणतात.

१२ जी रेषा वर्तुळास भिळते आणि वाढविली अस-
तां त्यास छेदित नाही, त्या रेषेस वर्तुळस्पर्शरेषा असें
म्हणतात.

१३ जी वर्तुळे परस्परांस भिळतात, पण छेदित
नाहींत, तीं वर्तुळे परस्परांस स्पर्श करितात असें म्ह-
णतात, आणि अशा प्रकारच्या वर्तुळांस
स्पर्शवर्तुळे असें म्हटलें तरी चालेल 

१४ स्पर्शरेषा ज्या बिंदूत वर्तुळास भिळते किंवा
स्पर्शवर्तुळे ज्या बिंदूत परस्परांस भिळतात त्या बिं-
दूंस स्पर्शबिंदु असें म्हणतात.

१५ वर्तुळमध्यापासून ज्या वरलंब केले आणि

ते समान असले तर त्या ज्या मध्यापासून सारखे अंतरावर आहेत असें म्हणतात, आणि ज्याज्येवरमहसर लंब असतो, ती ज्या मध्यापासून दूरतर आहे असें म्हणतात.

१६ जी रेषा वर्तुळाबाहेर एक बिंदु घेऊन काढली असते व जी वर्तुळास दोन बिंदूंत मिळते, त्या रेषेस छेदनरेषा असें म्हणतात. छेदनरेषाही एक वाढविलेली ज्याच होय, असें म्हटलें अज्ञातां चालेल, आणि वर्तुळाचे बाहेरील ज्या बिंदूपासून छेदनरेषा काढली असते त्या बिंदूस बाह्य छेदनबिंदु असें म्हटलें असतां चालेल.

कोणतेही वर्तुळाचा मध्यकाढावयाचा.

अबक कर्तुकांत अब ज्या काढ, आणि

बरड बिंदूतून कडलंब

आणि कर्ई रघेचे क

फ मध्यबिंदु नसल्यास ग मध्यबिंदु आहे,

असें मानूं ग, अ ग, व आणि ग, ड बिंदु सांख्ये

અડગ આણિ ગઢવ હ્યા દોન ત્રિકોણાંત

अड बाजू बड बाजू बरोबर आहे, ड ग

दोन त्रिकोणांस साधारण आहे, आणि अ ग, ब ग बरोबर आहे, कारण अ ग आणि ग ब ह्या

दोन्ही रेखा त्रिज्या आहेत, म्हणून (१ ब्रू० ८ व्या सि० प्र०) अडग कोन गडब कोनाबरोबर आहे, म्हणून (१ ब्रू० ११ व्या सि० प्र०) गडब कोन काठकोन आहे. पण फडब हा कोनही काठकोन आहे, ह्याकरितां फडब कोन गडब कोनाबरोबर आहे. मोठा कोन छहानकोनाबरोबर होणें ही गोष्ट असाव्य आहे, ह्याकरितां ग हा अबक वर्तुळाचा मध्यबिंदु नव्हे. ह्या प्रमाणेंच सिद्ध करून शरवर्षितां घेईल, कीं फ शिवाय दुसरा बिंदु अबक वर्तुळाचा मध्य असावयाचा नाही, म्हणजे अबक वर्तुळाचा मध्यबिंदु फ च आहे.

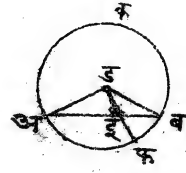
१ कु० वर्तुळांत जी रेख दुसऱ्या रेखेचे समान दोन भाग करून ती वर लंब होते, त्या रेखेंत वर्तुळाचा मध्य असतो.

२ सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळाच्या परिघांत कोणतेही दोन बिंदु घेतले तरी त्यांस सांधणारी रेख वर्तुळांतच पडते.

अबक एक वर्तुळ आहे. त्याच्या परिघांत अ आणि ब असे दोन बिंदु घेतले आहेत, तर त्यांस

सांघणारी अब रेष वर्तु-
ळांतच पडेल.



अब रेषेंत ई बिं-

दु घे, अब क वर्तुळा -

चा (१ बू० १ व्या सि० प्र०) ड मध्य बिंदु काढ,
अ, ड, ड, ब आणि ड, ई बिंदु सांध, आणि ड ई वा
जू परिघास मिळते तों पर्यंत वाढीव. ती रेष परिघास ज्या
स्थळां मिळते त्यास फ अशी संज्ञा दे. अब ड त्रि-
कोणांत अ, ड बाजू ब, ड बाजू बरोबर आहे, ह्या करितां
(१ बू० ५ व्या सि० प्र०) ड अब कोन ड ब अ
कोनाबरोबर आहे, आणि अ, ई, ड त्रिकोणाची
अ, ई बाजू ब पर्यंत वाढविली आहे, ह्या करितां
(१ बू० १६ व्या सि० प्र०) ड ई ब कोन ड अ ई
कोनापेक्षां मोठा आहे, पण ड अब कोन ड ब अ
कोनाबरोबर आहे, म्हणून ड ई ब कोन ड ब ई
कोनापेक्षां मोठा आहे, म्हणून (१ बू० १९ व्या सि०
प्र०) ड ब बाजू ड ई बाजूपेक्षां मोठी आहे. पण
ड ब आणि ड फ बरोबर आहेत, कारण त्या ही -
न्ही रेखा त्रिज्या आहेत, ह्यास्तव ड फ ड ई पेक्षां
मोठी आहे, ह्यावरून स्पष्ट होतें, कीं ई बिंदु वर्तुळांत

आहे. अब रेघेंत अ आणि ब ह्यांच्या गधले जितके बिंदु आहेत तितके वर्तुळांत आहेत, असें ह्याच रीतीने सिद्ध करतां येईल, ह्या करितां अब रेघ वर्तुळांत आहे, हे सिद्ध.

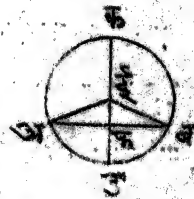
टीप. ज्या स्थलीं दोन बिंदु व्यासाची वोंकेंच आहेत, त्या स्थलीं ह्या सिद्धांताची सत्यता उघडच आहे, व ज्या स्थलीं व्यासापेक्षां कमी अंतरावर दोन बिंदु आहेत, त्या स्थलीं सुद्धां ह्या सिद्धांताची सत्यता वर्तुळाच्या गुणावरून स्पष्टच दिसून येते, परंतु ज्या स्थलीं दोन बिंदु अत्यंत जवळ आहेत, त्या स्थलीं मात्र त्या दोन बिंदूंस सांधणारी रेघ सर्वथैव वर्तुळाचे आंतच पडेल, तिचा किंचित् सुद्धां भाग कोंसावर पडणार नाही, ही गोष्ट उघड दिसत नाही, किंचित् संशयास जागा राहते. तर त्या स्थलचा संशय दूर करण्याकरितां ह्या सिद्धांताची सिद्धता कारणे आवश्यक होय. ज्या स्थलीं बिंदु अत्यंत जवळ आहेत, ते स्थल सिद्धता करण्या करितां घेतले असतां, आकृति गिचमीड होईल, ह्या करितां ज्या स्थलीं बिंदु पूर्वेपणीं दूर अंतरावर आहेत, तेच स्थल सिद्धते करितां घेतले पाहिजे. आतां त्या स्थलीं सिद्धांताची सिद्धता झाली असतां, ती सिद्धता परमावधीच्या

स्थलालाही लागू पडेल. ह्या सिद्धांताप्रमाणें दुसरे पुष्कळ सिद्धांत आहेत, कीं ज्यांची सत्यता परमावधीच्या स्थलाखेरीज करून सर्वस्थलीं उघड दिसते, परंतु परमावधीच्या स्थलची दांका दूर करण्याकरितां असल्या सर्व सिद्धांतांची सिद्धता केली आहे.

३ सिद्धांत प्रमेय.

वर्तुल मध्यांतून जाणारी जी रेघ वर्तुळ मध्यांतून न जाणाऱ्या ज्येचे दोन समान भाग करिते ती रेघ त्या ज्येवर लंब होते; व वर्तुल मध्यांतून जाणारी जी रेघ ज्येवर लंब होते ती तिचे दोन समान भाग करते.

अबक एक वर्तुळ आहे, त्यामध्ये कड रेघ मध्यांतून काढली आहे, ती मध्यांतून न जाणाऱ्या अब ज्येचे दोन समान भाग करिते, त्यास ती अ-



ब वर लंब आहे, हें सिद्ध करावयाचें. (३ बु० १ व्या सि० प्र०) अबक वर्तुळाचा ई मध्य काढ, आणि अ, ई आणि ब, ई बिंदु सांध.

अफई आणि बफई ह्या दोन त्रिकोणांत

अई बाजू बई बाजू बरोबर आहे, कारण त्या दोन्ही
त्रिज्या आहेत, अफ बाजू बफ बाजू बरोबर आ-
हे, आणि फई दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे, ह्या क-
रितां (१ बू० ८ व्या सि० प्र०) अफई आणि बफ-
ई हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत, म्हणून अफई
कोन बफई कोनाबरोबर आहे, म्हणून (१ बू० ११
व्या व्या० प्र०) अफई आणि बफई हे दोन्ही
कोन काटकोन आहेत, ह्या करितां कड रेख अब
रेषेवर लंब आहे, हें सिद्ध.

कड रेख मध्यांतून जाऊन अब रेषेवर लंब
ब पडते, त्यास कड रेख तिचे दोन समान भाग करि-
ते, म्हणजे अफ रेष फब रेषे बरोबर होते, हें सि-
द्ध करावयाचें.

पूर्वीप्रमाणेंच आकृति कर. ई अफ आणि
ई बफ ह्या दोन त्रिकोणां बई अ रेष ईब बरोबर
आहे, कारण त्या दोन्ही रेषा त्रिज्या आहेत, (१ बू०
९ व्या सि० प्र०) ई अफ कोन ई बफ कोनाबरो-
बर आहे, आणि अफई काटकोन बफई काटको-
नाबरोबर आहे, ह्या करितां (१ बू० २६ व्या सि० प्र०)
ई अफ आणि ई बफ हे दोन त्रिकोण एकरूप

आहेत, म्हणून अफ बाजू व फ वरोवर आहे हे सिद्ध.

कु० जी रेघ ज्येचे दोन समान भाग करिते, आणि ती वर लंब होते, ती रेघ वर्तुल मध्यांतून जाते.

कारण, जी रेघ वर्तुल मध्यांतून जाऊन ज्येचे दोन समान भाग करिते ती रेघ ज्येवर लंब असते, ह्या करितां ती रेघ आणि ज्येचे दोन समान भाग करून ती वर लंब होणारी रेघ ह्या जमून जातील, म्हणून ज्येचे दोन समान भाग करून ती वर लंब होणारी रेघ वर्तुल मध्यांतून जाते, हे उघड आहे.

टीप. वर्तुल मध्यांतून जाणें, वर्तुल मध्यांतून न जाणाऱ्या ज्येवर लंब होणें आणि तिचे दोन समान भाग करणें, ह्या तीन गुणांपैकी ज्या रेघेच्या अंगी दोन गुण असतील तिचे अंगी तिसरा गुण असिलच.

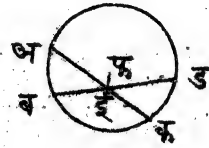
४. सिद्धांत. प्रमेय.

मध्यांतून उभयतां न जाणाऱ्या अशा दोन ज्यांनीं परस्परांस छेदिलें असतां जे त्यांचे रचड छेदनात ते समान नसतात.

अबक एक वर्तुळ आहे, त्यांत अक आ-

णि बड ह्या दोन ज्या परस्परांस ई स्थळीं डेरितात,
आणि ह्या मुळें जे त्यांचे

अई आणि ईक आ
णि बई आणि ईड
खंड पडले आहेत हे
समान नाहीत, म्हणजे



अई, ईक बरोबर नाही, व बई ईड बरोबर
नाहीं, हे सिद्ध करावयाचे

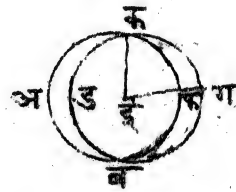
अई, ईक बरोबर आहे, आणि बई, ईड
बरोबर आहे असें म्हटल्यास, (३ बू. १ ल्या सि.
प्र०) अबकड वर्तुळान्ना फ मध्य काट, आणि
फ, ई बिंदु सांध. फ ई रेघ मध्यांतून येऊन अ -
क रेघेचे ई स्थळीं दोन समानभाग करिते, ह्या करि-
तां (३ बू. ३ व्या सि. प्र०) फ ई अ हा कोन काटकोन
आहेतसें व फ ई रेघ वड रेघेचे ई स्थळीं दोन स-
मान भाग करिते, ह्या करितां फ ई ब कोन काट-
कोन आहे. फ ई अ कोन काटकोन आहे, असें
पूर्वी दाखविलें आहे, ह्या करिता फ ई ब कोन
फ ई अ कोना बरोबर आहे, पण लहान कोन
मोठ्या कोना बरोबर होणें हे अवश्य आहे, ह्या

स्तव अ ई आणि ई क हे खंड समान नाहीत, न-
सेंच ब ई आणि ई ड हे खंड समान नाहीत.

५ सिद्धांत प्रमेय.

जीं दोन वर्तुळें परस्परांस छेदितात, त्यांचा
मध्यबिंदु एक नसतो.

अ ब क आणि क ड ग हीं दोन वर्तुळें पर-
स्परांस ब आणि क ह्या
दोन बिंदूंत छेदतात, त्यास
ह्यांचा मध्य एक नाही, हें
सिद्ध करावयाचें.



ह्या दोन्ही वर्तुळांचा मध्य एक आहे, असें
म्हटल्यास त्यांचा मध्य ई आहे असें मानूं. ई, क
सांध, आणि ड फ ग एक रेषा काढ, ही रेषा अ
ब क वर्तुळास फ स्थळीं व क ब ग वर्तुळास
ग स्थळीं छेदिते. अब क वर्तुळाचा मध्य ई
आहे, ह्या करितां ई क रेषा ई फ बरोबर आहे, व
क ब ग वर्तुळाचा मध्य ई च आहे, ह्यास्तव क-
ई, ई ग बरोबर आहे. क ई, ई फ बरोबर
आहे, असें पूर्वी दाखविलें आहे, म्हणून ई फ,

ई ग बरोबर आहे. लहान रेघ मोठ्या रेघेबरोबर हो-
णे, हे अशक्य आहे, ह्या करितां अबक आणि क-
ब ग ह्या दोन वर्तुळांचा मध्य ई नाही.

६ सिद्धान्त. प्रमेय.

एक वर्तुळ दुसऱ्या वर्तुळाचे आंत असून त्यास
स्पर्श करित असल्यास त्या दोन वर्तुळांचा मध्यबिंदु
एक नसतो.

कडई वर्तुळ अबक वर्तुळास त्याचे आंत
असून क स्थळीं स्पर्श
करिते, त्यास त्या दोन व-
र्तुळांचा मध्यबिंदु एक
नाहीं, हे सिद्ध करावयाचे.



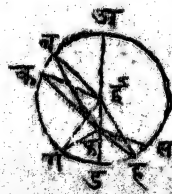
ह्यांचा मध्यबिंदु एक आहे, असे म्हणल्यास
फ मध्यबिंदु आहे असे मानूं. फ, क बिंदु सांध,
आणि फ ई व एक रेघ काढ. कडई वर्तुळा-
चा मध्य फ आहे, ह्यास्तव फ क, फ ई बरोबर
आहे, आणि अबक वर्तुळाचा मध्य फ न आहे, ह्या
करिता फ क, फ व बरोबर आहे, म्हणून फ ई, फ व
बरोबर आहे. लहान रेघ मोठ्या रेघेबरोबर होणे

अशक्य, साकरितां अबक आणि कडई ह्या दोन वर्तुळांचा मध्य एक नाही.

७ सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळाच्या व्यासांत मध्यबिंदु न घेतां दुसरा एक बिंदु घेऊन त्यापासून परिघापर्यंत रेखा काढल्या असतां त्या सर्वरेषां व्यासाच्या ज्या भागांत मध्यबिंदु असतो तो भाग मोठा भरतो, आणि व्यासाचा दुसरा भाग त्या सर्वरेषांपेक्षां लहान भरतो, आणि व्यासाच्या ज्या भागांत मध्यबिंदु असतो, त्याच्या समीपतर जी रेखा असते, ती दूरतर रेखापेक्षां मोठी भरते. त्या गृहीतबिंदूपासून समान अशा सेनचरेखा काढता येतील, परंतु त्यांपैकीं एक रेखा व्यासाचे उजवे अंगास पडेल, व एक डावे अंगास पडेल.

अबकड एक वर्तुळ आहे, त्याच्या अड व्यासांतील ई मध्यबिंदु न घेतां फ बिंदु घेऊन त्यापासून फ ब, फ क आणि फ ग अशा तीन रेखा केल्या आहेत, तर ह्या सर्वरेषांपेक्षां ज्या



मध्ये मध्यबिंदु आहे, असा जो व्यासाचा भाग अफ-
हा मोठा आहे, आणि दुसरा जो व्यासाचा भाग फ-
ड हा सर्व रेखांपेक्षां लहान आहे. फब फक
पेक्षां मोठी आहे, आणि फक फग पेक्षां मोठी
आहे, हे सिद्ध करावयाचे.

ब,ई क,ई आणि ग,ई बिंदु सांध. (१ बू.
२० व्या सि. प्र०) फब पेक्षां बई आणि ई-
फ ह्यांची बेरीज मोठी आहे, परंतु बई, अई
बरोबर आहे, ह्या करितां अई आणि ईफ ह्यां-
ची बेरीज फब पेक्षां मोठी आहे, म्हणजे अफ, फब
पेक्षां मोठी आहे. बईफ आणि कईफ ह्या दो-
न त्रिकोणांत बई बाजू कई बाजू बरोबर आहे,
बईफ बाजू दोहोंस साधारण आहे, परंतु बई
आणि ईफ ह्या दोन बाजूंतील कोन कई आणि
ईफ ह्या दोन बाजूंतील कोनापेक्षां मोठा आहे, ह्या
करितां (१ बू. २४ व्या सि. प्र०) बफ बाजू कफ
बाजू पेक्षां मोठी आहे, आणि ह्याच कारणास्तव क-
फ बाजू गफ बाजू पेक्षां मोठी आहे. गफ आ-
णि फई ह्यांची बेरीज गई पेक्षां मोठी आहे,
आणि गई, ईड बरोबर आहे, ह्याकरितां गफ

आणि फ ई ह्यांची बेरीज ई ड पेक्षा मोठी आहे, दोन्ही पेक्षांत फ ई साधारण आहे, ह्या करितां ती रेघ काढून दाकिली असतां ग फ फ ड पेक्षां मोठी आहे, असे स्पष्ट होतें, ह्या करितां फ बिंदूपासून परिधापर्यंत ज्या रेघा काढल्या आहेत, त्या सर्वां पेक्षां फ अ मोठी आहे, व फ ड लहान आहे, आणि ब फ, क फ पेक्षां मोठी आहे व क फ ग फ पेक्षां मोठी आहे.

फ बिंदूपासून परिधापर्यंत दोनच समान रेघा काढतां येतील. त्यांपैकीं एक रेघ फ ड चे उजवे अंगास पडेल व एक रेघ डाव्या अंगास पडेल.

ई फ रेघेंत ई बिंदूजवळ ग ई फ कोना बरोबर (१ बू० २२ ज्या सि० प्र०) फ ई ह कोन कर, आणि फ, ह बिंदु सांध. ई फ ग आणि ई फ ह ह्या दोन त्रिकोणांत ग ई बाजू ह ई बाजू बरोबर आहे, फ ई बाजू दोहों त्रिकोणांस साधारण आहे, आणि ग ई फ कोन ह ई फ कोना बरोबर आहे, ह्या करितां (१ बू० ४ ज्या सि० प्र०) फ ह बाजू फ ग बाजू बरोबर आहे फ बिंदू -

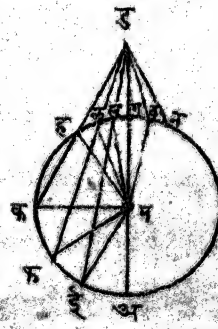
पासून फ ह रेघेशिवाय दुसरी रेघ ग फ बरोबर
 दावयाची नाही. होईल असे वाटत असल्यास फ स
 ग फ बरोबर आहे, असें मानूं. फ स, फ ग बरोबर
 आहे, आणि फ ग, फ ह बरोबर आहे, ह्या करितां
 फ स फ ह बरोबर आहे, पण आतांच नुकतें
 सिद्ध केले, की ज्यासांच्या ज्या भागांत मध्यबिंदु अ-
 सतो, त्या भागाच्या समीपतर जी रेघ असते, ती दूर-
 तर रेघेपेक्षां मोठी असते, ह्यास्तव फ स फ ह
 पेक्षां मोठी आहे, म्हणून मोठ्या रेघेबरोबर लहान
 रेघ होणें ही गोष्ट अशक्य, ह्यास्तव फ स फ ह
 बरोबर नाही, म्हणून तिच्या बरोबरीची जी फ ग
 रेघ तिचींही बरोबर नाही.

८ सिद्धांत प्रमेय.

वर्तुळाचे बाहेरील अंगास एक बिंदु घेऊन
 त्या पासून वर्तुळाचे परिघापर्यंत रेषा काढल्या अ-
 सतां त्या रेषांचे कीं ज्या रेषा अंतर्बक्र परिघावर पड-
 तात त्यांच्यामध्ये जी रेषा मध्यांतून जाते, ती महान
 असते, व मध्यांतून जाणाऱ्या रेषेच्या समीपतर जी
 रेषा असते, ती दूरतर रेघेपेक्षां मोठी असते, आणि

ज्या रेखा बहिर्वर्तक परिधास लागतान त्यांपैकीं जी बाहेरील बिंदु व व्यास ह्यांच्या मध्ये असते, ती रेखा लघुत्तम असते, व लघुत्तम रेखेच्या समीप तर जी रेखा असते, ती दूरतर रेखेपेक्षां लहान असते. बाहेरील बिंदूपासून परिधावर होनच सामान रेखा होतात, त्यांपैकीं एक लघुत्तम रेखेच्या उजवे अंगास पडते, व एक डावे अंगास पडते.

अबक एक वर्तुळ आहे, आणि त्याचे बाहेर ड बिंदु आहे. ह्या बिंदूपासून ड अ, ड ई, ड फ आणि ड क अशा रेखा परिधा पर्यंत काढल्या आहेत, आणि ह्या रेखांपैकीं ड अ रेखा मध्यांतून जाते. परिधाचा अंतर्वर्तक जो अ ई फ-क भाग ह्यावर ज्या रेखा पडतान त्यामध्ये मध्यांतून जाणारी अड रेखा महत्तम आहे, व तिच्या समीपतर जी रेखा आहे ती दूरतर रेखेपेक्षां मोठी आहे, म्हणजे ड ई, ड फ पेक्षां मोठी आहे व ड फ ड क पेक्षां मोठी आहे,



परंतु परिधान्या बहिर्वक्त्र हलसग भागावर ज्या
रेषा पडतान त्यांमध्ये डुग लघुतम आहे, जीही रेषा
व्यास व बाहेरील बिंदु ह्यांच्या मध्ये आहे. ह्या रेषेच्या
समीपतर जी रेषा आहे, ती दूरतर रेषेपेक्षां लहान
आहे, म्हणजे ड स डल पेक्षां लहान आहे, व ड-
ल, डह पेक्षां लहान आहे, हे सर्व सिद्ध करावयाचे.

(१ बू० १ व्या सि० प्र०) अबक वस्तु-
ळाचा म मध्य काढ, आणि म, ई, म, फ, म, क,
म, ह, म, ल, आणि म, स बिंदु सांध. अम रे-
ष म ई रेषेबरोबर आहे. ह्या दोन्ही रेषांत म ड
रेष मिळीव, तेव्हां अ ड रेष म ई आणि म ड
ह्यांच्या बरोबर बरोबर आहे. पण म ई आणि म-
ड ह्यांची बेरीज (१ बू० २० व्या सि० प्र०) ई ड
रेषेपेक्षां मोठी आहे, म्हणून अ ड रेष ई ड रेषे-
पेक्षां मोठी आहे. ई म ड आणि फ म ड ह्या दोन
त्रिकोणांत म ई बाजू म फ बाजू बरोबर आहे,
आणि म ड बाजू दोहोंन साधारण आहे, परंतु ई-
म ड कोन फ म ड कोनापेक्षां मोठा आहे, ह्या कारि-
नां (२ बू० २४ व्या सि० प्र०) ई ड बाजू फ ड
बाजूपेक्षां मोठी आहे. ह्या प्रमाणें न सिद्ध होवें, कीं

फड रेघ कड रेघेपेक्षां मोठी आहे. ह्या सर्व वरील कृतीवरून ही गोष्ट सिद्ध झाली, कीं ड अ रेघ महत्तम आहे, ड ई रेघ ड फ पेक्षां मोठी आहे, व ड फ रेघ ड क पेक्षां मोठी आहे.

(१ बू० २० व्या सि० प्र०) मस आणि सड ह्या दोन रेघांची बेरीज मड पेक्षां मोठी आहे, आणि मस मग बरोबर आहे, ह्या करितां बाकीची सड रेघ बाकीच्या गड रेघेपेक्षां मोठी आहे, म्हणजे गड सड पेक्षां लहान आहे. मलड त्रिकोणांतील स बिंदूपासून मड बाजूच्या म आणि ड ह्या टोंकांपर्यंत स म आणि सड रेघा काढल्या आहेत, त्यास (१ बू० २१ व्या सि० प्र०) मल आणि लड ह्या दोन बाजूंची बेरीज मस आणि सड ह्या दोन बाजूंचे बेरजे पेक्षां मोठी आहे. मस मल बरोबर आहे, तेव्हां लड सड पेक्षां मोठी आहे, हें उघड आहे. ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं ड ह डल पेक्षां मोठी आहे. म्हणून ड ग ही रेघ लघुत्तम होय, डल, डस पेक्षां मोठी आहे, व ड ह, डल पेक्षां मोठी आहे.

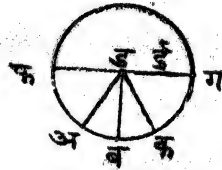
परिघापर्यंत ड बिंदूपासून समान अशा दोन-
च रेखा काढतां येतील, आणि त्यां पैकीं एक लघुतम
रेखेच्या उजव्या अंगास पडेल व एक डावे अंगास
पडेल.

म ड रेघेंत म बिंदूजवळ ड म स
कोना एवढा ड म ब कोन कर, आणि ड, ब सांध.
स म ड आणि ब म ड ह्या दोन त्रिकोणांत म स
बाजू म ब बाजू बरोबर आहे, म ड बाजू दोहों
त्रिकोणांस साधारण आहे, व स म ड कोन ब म -
ड कोनाबरोबर आहे. ह्या करितां (१ ब्रू० ४ थ्या
सि० प्र०) ड स ड ब बरोबर आहे. ड बिंदूपा -
सून परिघापर्यंत ड स शीं समान अशी ड ब
शिवाय दुसरी रेखा होणार नाही. होईल असें न्हट
ल्यास ड स बरोबर ड न रेखा होईल, असें मानूं.
ड ब, ड स बरोबर आहे, आणि ड न ड स बरो-
बर आहे, ह्या करितां ड ब ड न बरोबर आहे,
म्हणजे लघुतम रेखेच्या समीपतर जी रेखा ती दूर -
तर रेखेबरोबर आहे, पण असें होणें अशक्य हें
पूर्वी सिद्ध झालेंच आहे.

९ सिद्धान्त, प्रमेय.

वर्तुळांत ज्या बिंदूपासून दोहोंहून अधिक
समान रेषा परिघा पावेतो होनात तो मध्यबिंदु होय.

अबक एक वर्तुळ आहे. त्यांत ड बिंदू पा-
सून परिघापर्यंत ड अ,
ड ब आणि ड क अशा
दोहोंहून अधिक समान
रेषा होनात, तर ड हा
मध्यबिंदु आहे.



ड मध्य बिंदु नाही, असें म्हटल्यास ई मध्य
बिंदु आहे असें कल्पूं. ड, ई बिंदु सांध. आणि डई
रेषा परिघास मिळे तो पर्यंत दोहों अंगास बाढीव.
ती रेषा ज्या बिंदूत परिघास मिळते त्यांस फ आ-
णि ग अशा संज्ञा दे. ई मध्यबिंदु आहे, म्हणून
फ ग व्यास आहे. फ ग व्यासांत ड बिंदु घेऊन
त्यापासून ड क, ड ब आणि ड अ ह्या रेषा का-
ढल्या आहेत, त्यास (३ बू० ७ व्या सि० प्र०) व्या-
साचा ड ग भाग ह्या सर्व रेषांपेक्षां मोठा आहे,
ड क रेषा ड ब पेक्षां मोठी आहे, व ड ब, ड अ

पेक्षां मोठी आहे, पण डक डब आणि डअ
ह्या रेषांतर मूळच्या बरोबर आहेत, तेव्हा डक डब
पेक्षां मोठी होणें, व डब डअ पेक्षां मोठी होणें, हें
अशक्य होय, म्हणून ई हा मध्यबिंदु नव्हे. ह्याप्र-
माणेंच सिद्धकरितां येईल, कीं ड बिंदू शिवाय दुस-
रा कोणताही बिंदु मध्यबिंदु संभवणार नाही, म्हणून
ड हाच मध्यबिंदु आहे.

टीप. हा सिद्धांत आकृति काढल्याशिवाय ही
सहज सिद्ध करितां येतो, तो असा, कीं वर्तुळांन ज्या
बिंदूपासून परिघापर्यंत दोहोंहून अधिक रेषा काढ-
ल्या असतां सर्वसमान भरतात, तो मध्यान् बिंदु नव्हे,
असें (१ ब्रू० ७ व्या ति०) वरून स्पष्ट आहे, ह्याकरि-
तां ड हाच मध्यबिंदु आहे.

१० सिद्धांत प्रमेय.

कोणत्याही वर्तुळाचा परिघ दुसऱ्या वर्तुळाच्या
परिघास दोहोंपेक्षां अधिक स्थळीं छेदीत नाही.

दोहों स्थळांपेक्षां अधिक स्थळीं छेदील असें
म्हटल्यास फ अ व वर्तुळ ड ई क वर्तुळास, ब-
ग आणि फ ह्या तीन स्थळीं छेदितें असें मानूं.

अबक वर्तुळाचा स मध्य काढ, आणि
 स, ब स, फ आणि स, ग बिंदु मांध. सब, स-
 फ आणि स ग ह्या किन्ही रेखा अबक वर्तुळा-
 च्या त्रिज्या आहेत, ह्याक-
 रितां त्या परस्पर बरोबर
 आहेत. डईफ वर्तुळांत
 स बिंदू पाहून सब,
 स ग आणि स फ अशा तीन रेखा परिघापर्यंत
 काढल्या आहेत, आणि त्या सर्व समान आहेत,
 ह्या करितां (१ बु० ९ व्या सि० प्र०) स बिंदू ड-
 ईफ वर्तुळाचा मध्य आहे, परंतु ३ बुकाच्या पा-
 चव्या सिद्धांतांत असे सिद्ध केले आहे, कीं जीं वर्तुळे
 परस्परांस छेदितात त्यांचा मध्यबिंदू एक नसतो, ह्या
 करितां स बिंदू दोन्ही वर्तुळांचा मध्य आहे, असें
 म्हणतां येत नाहीं, ह्यास्तव दोन वर्तुळे दोहोंपेक्षां
 अधिक स्थळीं परस्परांस कदापि छेदणार नाहीत.



११ सिद्धांत. प्रमेय.

एक वर्तुळ दुसऱ्या वर्तुळाच्या आंत असून
 त्यास स्पर्श करीत असल्यास, त्या दोन वर्तुळांचे

प्रथम सांधणारी रेषा वाढविली, तर ती वर्तुळ स्पर्श बिंदूतून जाते.

अबक वर्तुळास त्याचे आतील अडई वर्तुळ अ स्थळीं स्पर्श करिते, तर ह्या दोन्ही वर्तुळांचे मध्यबिंदु फ आणि ग ह्यांस सांधणारी जी फग रेषा ती वाढविली असतां अ वर्तुळ स्पर्श बिंदूतून जाईल, हे सिद्ध करावयाचे.



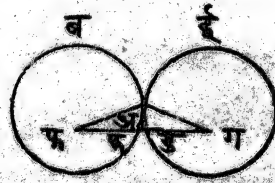
जाणार नाही, असें म्हटल्यास फग वाढविली असतां दु आणि ह ह्या बिंदूतून जाते, असें मानूं. अ, ग आणि अ, फ बिंदुसांध. (१ ब्र० २० व्या सि० ३०) अ, ग आणि ग, फ ह्यांची बेरीज अ, फ पेक्षां मोठी आहे. फ, अ आणि फ, ह बेरीज आहेत, कारण त्या अबक वर्तुळान्या भिज्या आहेत, ह्यास्तव अ, ग आणि ग, फ ह्यांची बेरीज फ, ह पेक्षां मोठी आहे. ग, फ दोन्ही पेट्यांस साधारण आहे, ह्या करितां दोहोंकडून काढून टाक, नेदां अ, ग रेषा ग, ह पेक्षां मोठी आहे, पण अडई

वर्तुळाचा ग मध्य बिंदु आहे, त्या करितां अ ग,
ग ड बरोबर आहे, म्हणून ग ड ग ह पेशां
मोठी आहे, परंतु ग ड ग ह पेशां लहान आहे,
हें स्पष्ट आहे, तेव्हां असें होणें अव्याप्य, म्हणून फ
आणि ग ह्या मध्यबिंदूस सांधणारी रेघ वाढवि-
ली असतां अ स्पर्शबिंदू शिवाय दुसरे बिंदू-
तून जाणार नाहीं, तिला अ स्पर्शबिंदूतूनच
गेळें पाहिजे.

१२ सिद्धांत. प्रमेय.

जीं दोन वर्तुळां परस्परांस बाहेरून स्पर्श
करितात त्यांचे मध्यबिंदु सांधणारी रेघ वर्तुळ-
स्पर्शबिंदूतून जाते.

अ व क आणि अ ड ई हीं दोन वर्तुळां
परस्परांस बाहेरून अ
बिंदुस्थलीं स्पर्शकरितात,
त्यास त्यांचे फ आणि ग
मध्यबिंदु सांधणारी फ-
ग रेघ अ स्पर्शबिंदू
तून जाते, हें सिद्ध करावयाचें.



फ ग रे घ अ स्पर्श बिंदूंतून जात नाहीं,
 असें म्हटल्यास क आणि उ ह्या दोन बिंदूंतून
 जाते असें मानूं. अ, फ आणि अ, ग बिंदु सांध.
 फ अवक वर्तुळाचा मध्य आहे, ह्या करितां
 अ फ, फ क बरोबर आहे, कारण त्या रेखा बि-
 ज्या आहेत. तसेंच ग अ उ ई वर्तुळाचा मध्य
 आहे, ह्या करितां अ ग ग उ बरोबर आहे, ह्याकं-
 रितां अ फ आणि अ ग ह्यांची बेरीज फ क आणि ग उ ह्यां-
 च्या बेरजे बरोबर आहे, तेव्हां सगळी रेखा फ ग, अ फ आणि
 अ ग ह्या दोन रेखांच्या बेरजेपेक्षां मोठी आहे, पण (१ बू० २० च्या
 सि० प्र०) ती त्या बेरजेपेक्षां लहान आहे, तेव्हां असें होणें अवाक्य,
 ह्यास्तव फ आणि ग ह्या दोन मध्य बिंदूंस सांधणारी रेखा स्पर्श बिं-
 दूंतूनच जाईल, दुसरे बिंदूंतून जाणार नाहीं, हें सिद्ध.

१२ सिद्धांत प्रमेय.

एक वर्तुळ दुसऱ्या वर्तुळास एकापेक्षा अधिक
 बिंदूंत स्पर्श करीत नाहीं, मग तें आंतून स्पर्श करो,
 किंवा बाहेरून करो.

एक वर्तुळ दुसरे वर्तुळास एकापेक्षा अधिक
 बिंदूंत स्पर्श करील, असें म्हटल्यास ई व फ

वर्तुळ अवक वर्तुळास व आणि ड ह्या दोन बिंदूंत आंतून स्पर्श करितें असें प्रथमतः मानूं.

ब, ड बिंदु सांध. (१ बू० १० व्या सि० प्र०) बड रेखे दोन समान भा-
ग कर, आणि
(१ बू० ११ व्या सि० प्र०) बड
च्या मध्यांतून



बड वर ह ग लंब कर. व आणि ड हे दोन बिंदु दोन्ही वर्तुळांच्या परिघांत आहेत, ह्या करितां त्यां स सांधणारी बड रेख (१ बू० २ व्या सि० प्र०) दोन्ही वर्तुळांच्या आंत पडते. बड रेखेवर ह ग रेख लंब आहे, व ह ग बड रेखे दोन समान भाग करिते, ह्या करितां (१ बू० १ व्या सि० कु० प्र०) दोन्ही वर्तुळांचे मध्य ह ग रेखेंत आहेत, आणि ह्या करितां ती रेख (१ बू० ११ व्या सि० प्र०) वर्तुळ स्पर्श बिंदूंतून जावी, परंतु वर्तुळ स्पर्श बिंदु तर त्या रेखेच्या बाहेरील अंगांस आहेत, तेव्हां असें होणें अशक्य, ह्या करितां एक वर्तुळ दुसरे वर्तुळास एका

पेशां अधिक बिंदूंत आंतून स्पर्श करणार नाही,
हें सिद्ध.

आतां एक वर्तुळ दुसऱ्या वर्तुळास बाहेरचे
अंगांनै एका बिंदू पेशां
ज्यास्त बिंदूंत स्पर्श करि
तें किंवा नाहीं, ह्या विष-
यीं विचार करूं.



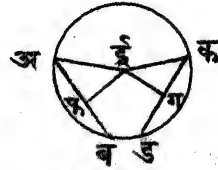
अकस वर्तुळ अबक वर्तुळास अ
आणि क ह्या दोन बिंदूंत बाहेरून स्पर्श करितें अ-
सें मानूं. अ, क सांध. अकस वर्तुळाच्या प-
रिघांत अ आणि क हे दोन बिंदु आहेत, ह्या क-
रितां त्यांस सांधणारी रेष अक (३ ब्रू० २ च्या
सि० प्र०) अकस वर्तुळांतच पडेल. अक-
स वर्तुळ, अबक वर्तुळाचे बाहेर आहे, ह्या क-
रितां अकस वर्तुळांतील अक रेषही अब-
क वर्तुळाच्या बाहेर आहे. अबक वर्तुळाच्या
परिघांत अ आणि क हे दोन बिंदु आहेत, ह्या
करितां त्यांस सांधणारी अक रेषही अबक
वर्तुळांत पडते; वर सिद्ध केलें, कीं ती पडत ना-
हीं, ह्या करितां एक वर्तुळ दुसरे वर्तुळास एका

बिंदूपेक्षां ज्यास्त बिंदूंत बाहेरून स्पर्श करिते, असें मानणें अयुक्तिक होय.

१४ सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळांत ज्या ज्या परस्परबरोबर असतात, त्या मध्यापासून सारखे अंतरावर असतात, व सारखे अंतरावर ज्या ज्या असतात, त्या परस्परबरोबर असतात.

अबडक वर्तुळांत **अब** आणि **कड** ह्या दोन ज्या परस्परबरोबर आहेत, त्यास त्या मध्यापासून सारखे अंतरावर आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.



अबडक वर्तुळाचा **ई** मध्यकाढ, आणि त्यापासून **अब** आणि **कड** ह्या दोन ज्यांवर **ईफ** आणि **ईग** रेषा लंब कर. **अब** जेवर **ईफ** रेषा **ई** मध्यापासून लंब काढली आहे, ह्या करितां (३ बू० ३ ज्या सि० प्र०) **अब** रेषेचे **ईफ** रेषा दोन समान भाग करिते. ह्या करितां **अफ** **फब** बरोबर आहे, व **अब**, **अफ** च्या

दुपटी बरोबर आहे, ह्या प्रमाणेंच डुक कग-
 चे दुप्पट आहे, असें सिद्ध होते. अब, डुक बरो-
 बर आहे, ह्या करितां अफ, कग बरोबर आहे.
 अई रेघ ईक रेघे बरोबर आहे, ह्या करितां अ-
 ई चा वर्ग ईक च्या वर्गा बरोबर आहे. अफई
 त्रिकोणांत अफई कोन काटकोन आहे, ह्या क-
 रितां (१ बू० ४७ व्या सि० प्र०) अई चा वर्ग
 अफ आणि ईफ ह्यांच्या वर्गांच्या बेरजे बरोब-
 र आहे, तसेंच ईगक त्रिकोणांत ईगक कोन
 काटकोन आहे, ह्या करितां ईकचा वर्ग ईग आणि क-
 ग ह्यांच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर आहे. अई चा
 वर्ग ईक च्या वर्गा बरोबर आहे, ह्या करितां अफ
 आणि ईफ ह्यांच्या वर्गांची बेरीज ईग आणि
 कग ह्यांच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर आहे, अफ
 कग बरोबर आहे, ह्या करितां अफ, कग बरो-
 बर आहे, तेव्हां ईफ ईगे बरोबर आहे, हें उघ-
 ड आहे. म्हणून ईफ ईग बरोबर आहे, म्ह-
 णून (३ बू० १५ व्या सि० प्र०) अब आणि
 कड ज्या मध्यापासून सारखे अंतरावर आहे-
 त.

ज्या ज्या वर्तुल मध्यापासून सारखे अंतरावर
असतात त्या परस्परबरोबर असतात याविषयी.

अब आणि **कड** ह्या दोन ज्या ई मध्यापा-
सून सारखे अंतरावर आहेत, म्हणजे ईफ, ईग
बरोबर आहे, त्यास **अब कड** बरोबर आहे, हे सि-
द्ध करावयाचे. पूर्वी प्रमाणेच आकृतिकरून **अब**,
अफ च्या दुषट आहे, व **कड** **कग** च्या दुषट
आहे, आणि **अफ** आणि **फई** ह्यांच्या वर्गांची बे-
रीज **ईग** आणि **कग** ह्यांच्या वर्गांच्या बेरजे
बरोबर आहे, हे सर्व पूर्वी प्रमाणेच सिद्ध होते. आ-
ता **ईफ** **ईग** बरोबर आहे, कारण **ईफ** **ईग**
बरोबर आहे, म्हणून **अफ**, **कग** बरोबर आहे, हे
स्पष्ट आहे, म्हणून **अफ**, **कग** बरोबर आहे. **अ-
फ**, **अब** च्या अर्धाबरोबर आहे, आणि **कग** **क-
ड** च्या अर्धाबरोबर आहे, याकरिता **अब कड**-
बरोबर आहे.

१५ सिद्धांत. प्रमेय.

व्यास सर्व ज्या मध्ये मोठा असतो. वर्तुल म-
ध्याच्या समीपतर जी ज्या असते, ती वर्तुल मध्याच्या

दूरतर ज्येपेक्षां मोठी असते. महत्तर ज्या लघुतर
ज्येपेक्षां मध्यापासून जवळ असते.

अडकब एक वर्तुळ आहे. त्याचा व्यास

अड आहे, व मध्य ई
आहे. फग ज्येपेक्षां
बक ज्या मध्याजवळ
आहे, त्यास अड व्यास



बक ज्येपेक्षां मोठा आहे, व बक ज्या फग ज्येपे-
क्षां मोठी आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

ई मध्यापासून बक आणि फग ह्या
दोन ज्योवर ईह आणि ईस अनुक्रमें लंब
कर, आणि ईब, ईक आणि ई,फ बिंदु सांध.
अई ईब वरोवर आहे, आणि ईड ईक
वरोवर आहे, ह्याकरितां अड व्यास बई आ-
णि ईक ह्यांच्या बेरजेवरोवर आहे. (१ बू० २०
व्या सि० प्र०) बई आणि ईक ह्यांची बेरीज ब-
क ज्येपेक्षां मोठी आहे, ह्याकरितां अड व्यास ब-
क ज्येपेक्षां मोठा आहे.

फग रेपेपेक्षां बक रेपई मध्याजवळ आ-
हे, ह्याकरितां (२ बू० १५ व्या सि० प्र०) ईह

लंब ई स लंबापेक्षां लहान आहे. १४ व्या सिद्धां-
ताच्या सिद्धतेचा प्रकार लक्षांत आणिला अस-
तां ही गोष्ट तेव्हांच लक्षांत येईल, कीं ब क ज्या
ब ह भागाच्या दुप्पट आहे, व फ ग ज्या फ
स भागाच्या दुप्पट आहे, आणि ब ह आणि ई
ह ह्यांच्या वर्गांची बेरीज फ स आणि स ई ह्यां-
च्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर आहे. ई ह, स ई-
पेक्षां लहान आहे, ह्या करितां ई ह चा वर्ग स ई-
च्या वर्गापेक्षां लहान आहे, आणि ह्या करितां ब-
ह चा वर्ग फ स च्या वर्गापेक्षां मोठा आहे, म्हणून
ब ह रेष फ स पेक्षां मोठी आहे. ब ह, ब क
ज्येचें अर्ध आहे, व फ स, फ ग ज्येचें अर्ध आ-
हे, ह्या करितां ब क, फ ग ज्ये पेक्षां मोठी आहे.

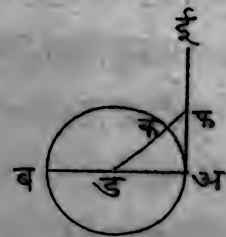
ब क ज्या फ ग ज्ये पेक्षां मोठी आहे,
त्यास फ ग ज्ये पेक्षां ब क ज्या मध्यापासून ज-
वळ आहे, म्हणजे ई ह स ई पेक्षां लहान आहे,
हें सिद्ध करावयाचें. पूर्वी प्रमाणेंच आकृति केली
आहे. ब क फ ग पेक्षां मोठी आहे, ह्या करितां
ब ह रेष फ स पेक्षां मोठी आहे, म्हणून ब ह,
फ स पेक्षां मोठा आहे. ब ह आणि ई ह ह्यांच्या

वर्गांची बेरीज फूस आणि सई ह्यांच्या वर्गांच्या
बेरीजेबरोबर आहे; आणि बहू, फूस पेशां मोठा
आहे, ह्या करितां ईह चा वर्ग सईच्या वर्गापेशां
लहान आहे, म्हणून ईह लंब सई पेशां लहान
आहे.

१६ सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळाचे व्यासावर त्याचे टोंकांतून लंब केला
असतां तो वर्तुळाचे बाहेर पडतो, व तो लंब व व-
र्तुळाचा परिघ ह्यांच्या मध्ये व्यासाच्या त्याच टोंका-
पासून रेघ काढली असतां ती रेघ वर्तुळास छेदल्या
वांचून राहणार नाही.

अबक एक वर्तुळ आहे, त्याचा मध्य ड
आहे, आणि व्यास अब आहे. अब व्यासावर
अ टोंकापासून अई
लंब काढला आहे, त्यास
अई लंब वर्तुळाचे बाहे-
रील अंगास आहे, हे सि-
द्ध करावयाचे.

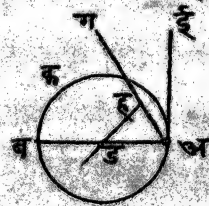


अई रेघेंत एक फ बिंदु घे, आणि ड, फ

बिंदु सांध. ड फ रेघ वर्तुळास क स्थळीं छेदिते.
 ड अ फ कोन काढकोन आहे, ह्या करितां (१ बू.
 ३२ व्या सि. प्र०.) तो अ फ ड कोनापेक्षां मो-
 ठा आहे, आणि ह्या करितां (१ बू. १९ व्या सि. प्र०.)
 ड फ रेघ ड अ रेघेपेक्षां मोठी आहे. ड अ रेघ
 ड क बरोबर आहे, ह्या करितां ड फ रेघ ड क पेक्षां
 मोठी आहे, ह्यावरून ही गोष्ट स्पष्ट आहे, कीं फ
 बिंदु वर्तुळा बाहेर आहे. ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करितां
 येईल, कीं अ ई रेघेंतील सर्व बिंदु वर्तुळाच्या बा-
 हेर आहेत, म्हणून अ ई रेघ वर्तुळाच्या बाहेर
 आहे.

अ ई रेघ आणि अ ब क वर्तुळाचा परिघ
 ह्यांच्या मध्ये अ ब व्यासाच्या अ ठोंकापासून रेघ
 काढली असतां, ती वर्तुळास छेदील, हे सिद्ध करा-
 वयाचें.

अ ठोंकापासून काढकोनापेक्षां लहान अ-
 सा ड अ ग कोन कर-
 णारी एक अ ग रेघ
 काढ. अ ग रेघेवर ड
 मध्यापासून ड ह रेघ



लंब कर. उ अ ह त्रिकोणांत उ ह अ कोन का-
टकोन आहे, ह्या करितां बाकीचे दोन्ही कोन काटकोना-
पेक्षां लहान आहेत, म्हणून अ उ ह कोन उ ह -
अ कोनापेक्षां लहान आहे, आणि ह्या करितां उ -
ह रेघ उ अ रेघेपेक्षां लहान आहे, म्हणून ह
बिंदु वर्तुळामध्ये आहे म्हणून अ ग रेघ वर्तुळास
छेदिते, हें स्पष्ट आहे.

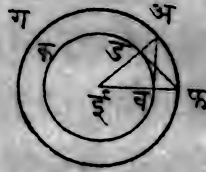
कु० ह्या वरून स्पष्ट आहे, कीं त्रिज्येवर तिच्या
दोंकापासून रेघ लंब केली असतां, ती वर्तुळास
स्पर्श रेखा होते, आणि ती रेघ वर्तुळास एकच बिंदू-
त स्पर्श करिते, कारण जर ती वर्तुळास दोन ठिका-
णीं मिळाली तर ती (३ ब्रू० २ च्या सि० प्र०) वर्तु-
ळाच्या आंत पडेल. आणखीही गोष्ट स्पष्ट आहे, कीं
वर्तुळास एका बिंदूंत एकच रेघ स्पर्श करील, दोन
रेखा स्पर्श करणार नाहीत.

१७ सिद्धांत. कृत्य.

वर्तुळाच्या परिघा बाहेर किंवा परिघांत विव-
क्षित बिंदु असतां त्यापासून त्या वर्तुळास स्पर्श रेखा
काढावयाची.

बकड एक वर्तुळ आहे व त्याच्या बाहेर -

त्या अंगास एक अ
बिंदु आहे, त्यास त्या पा-
सून त्या वर्तुळास स्पर्श
रेषा काढावयाची. बक.



ड वर्तुळाचा ई मध्य (१ बू० १ त्या सि० प्र०)
काढ, आणि अ, ई बिंदु सांध. ई मध्य धरून ई-
अ त्रिज्येने अ फ ग वर्तुळ काढ. (१ बू० ११ त्या
सि० प्र०) ई अ रेषेवर ड बिंदूतून ड फ
लंब कर, आणि ई, फ आणि अ, ब सांध.

अ फ ग आणि ड ब क ह्या दोन वर्तुळां-
चा मध्य ई बिंदु आहे, ह्या करितां अ ई, ई फ
बरोबर आहे, व ड ई ई ब बरोबर आहे, आणि
ह्या करितां अ ब ई आणि फ ड ई ह्या दोन
त्रिकोणांत अ ई आणि ई ब ह्या दोन बाजू
ई फ आणि ड ई ह्या दोन बाजूं बरोबर अनुक्रमे
आहेत, व अ ई आणि ई ब ह्यांच्या मधील कोन
ई फ आणि ड ई ह्यांच्या मधील कोना बरोबर
आहे, म्हणून (१ बू० ४ व्या सि० प्र०) अ ब ई
आणि फ ड ई हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत,

यासव फडई कोन अबई कोनावरोबर आहे.
 फडई कोन काटकोन आहे, ह्या करितां अब-
 ई कोनही काटकोन आहे. ई ब त्रिज्या आहे,
 आणि तीवर तिचे देंकांतून अब लंब काढला
 आहे, ह्या करितां (३ बू० १६ व्या सि० कु० प्र०)
 अब रेघ कडब वर्तुळाची स्पर्शरेषा आहे, आणि
 अब रेघ वर्तुळाच्या परिघाबाहेरील जो अबिंदु
 त्यांतून काढली आहे.

आतां बडक वर्तुळाच्या परिघांत ड बिंदु
 आहे. त्यास त्यांतून डबक वर्तुळास स्पर्शरेषा
 काढावयाची.

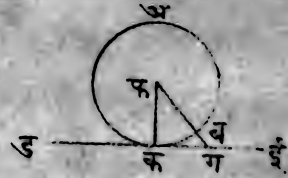
ड, ई बिंदु सांध, आणि डई वर ड फ लं-
 व काढ. डई त्रिज्या आहे, आणि तीवर तिचे दें-
 कांतून ड फ लंब काढला आहे, ह्या करितां (३ बू०
 १६ व्या सि० कु० प्र०) डब, डबक वर्तुळाची
 स्पर्शरेषा आहे.

१० सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळास स्पर्शरेषा काढली असतां स्पर्शबिं-
 दु व मध्यबिंदु ह्यांस सांधणारी रेघ त्या स्पर्शरेषेवर

लंब होते.

अबक वर्तुळास ड ई रेघ क स्थळीं स्पर्श करिते, त्यास क स्पर्शबिंदु आणि फ मध्यबिंदु ह्यांस सांधणारी फ क रेघ ड ई स्पर्शरेषेवर लंब आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

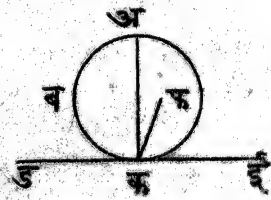


फ क लंब नाही, असें म्हटल्यास फ ब ग रेघ ड ई वर लंब आहे असें मानूं. फ ग क त्रिकोणांत फ ग क कोन काटकोन आहे, तेव्हां अर्थात्च (१ बू० १७ व्या सि० प्र०) फ क ग कोन लघु आहे, आणि ह्याकरितां (१ बू० १९ व्या सि० प्र०) फ क रेघ फ ग पेक्षां मोठी आहे, परंतु फ क फ ब वरोबर आहे, ह्याकरितां फ ब रेघ फ ग पेक्षां मोठी आहे, पण लहान रेघ मोठ्या रेषेपेक्षां मोठी होणें हें अत्राक्य, ह्याकरितां फ ब ग रेघ ड ई रेघेवर लंब नाही. ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होईल, कीं फ क शिवाय दुसरी कोणती रेघ ड ई वर लंब होणार नाही, म्हणून फ क ड ई वर लंब आहे.

१९ सिद्धांत प्रमेय.

वर्तुळास स्पर्शरेषा काटून तीवर स्पर्शबिंदूतून एक लंब काढला असता तो लंब वर्तुळमध्या-
वून जातो.

अबक वर्तुळास डई स्पर्शरेषा का-
टून क स्पर्श बिंदूतून तीवर क अ लंब
काढला आहे, त्यास क अ लंब मध्य बिंदूतून
जातो, हे सिद्ध करावयाचे.



क अ लंब मध्य बिंदूतून जात नाही असें
म्हटल्यास, क अ रेषेबाहेर फ मध्य बिंदु आहे अ-
सें मानूं. फ, क बिंदु सांध. अबक वर्तुळास
डई रेषा स्पर्श करिते, आणि फक रेषा फ मध्य
बिंदूपासून क स्पर्श बिंदूपर्यंत केली आहे, ह्याक-
रितां (३ बु० १८ व्या सि० प्र०) फक रेषा डई
वर लंब आहे, आणि ह्याकरितां फ क ई कोन का-
टकोन आहे, परंतु अ क ई कोनही काटकोन
आहे, ह्याकरितां फ क ई कोन अ क ई कोना-

बरोबर आहे, परंतु लहान कोन मोठ्या कोनाबरोबर
होणें अशक्य, ह्या करितां फ बिंदु अबक वर्तुळा-
चा मध्य नाही. ह्या प्रमाणेंच अक रेघेबाहेर जेवढे
म्हणून बिंदु आहेत तेवढे वर्तुळमध्य नाहीत असें
सिद्ध करितां येईल, ह्यास्तव अबक वर्तुळाचा
मध्यबिंदु अक रेघेंत आहे.

कु० मध्यबिंदूतून स्पर्शरेषेवर लंब काढला अस-
तां तो लंब स्पर्शबिंदूतून जातो.

कारण मध्यापासून स्पर्शबिंदूपर्यंत रेघ काढ -
ली असतां ती स्पर्शरेषेवर लंब होते, ह्या करितां ही रेघ
आणि मध्यापासून स्पर्शरेषेवर काढलेली लंब रेघ
ह्या एकमेकीशीं जमून जातील, म्हणून मध्यापासून
स्पर्शरेषेवर रेघ लंब काढली असतां ती स्पर्शबिंदू-
तून जाते, हें उघड आहे.

टीप. अठराव्या सिद्धांत, एकुणिसावा सिद्धां-
त व एकुणिसाव्या सिद्धांताची कुरलरी ह्यांवरून
असें दिसून येतें, कीं मध्यांतून जाणें, स्पर्शरेषेवर
लंब असणें, व स्पर्शबिंदूतून पार जाणें, ह्या तीन
गुणांपैकी ज्या रेघेच्या अंगां दोन गुण असतात ति-
च्या अंगां तिसरा गुण असतोच असतो.

२० सिद्धांत प्रमेय.

मध्य कोण, तो ज्या कोंसावर असतो त्या वरच्या
परिघ कोणाच्या दुप्पट असतो.

अ व क एक वर्तुळ आहे, त्यांत ब ड क मध्य-
कोण आहे, व ब अ क

परिघ कोण आहे, आणि
ते दोन्ही कोन ब क कों
सावर आहेत, त्यास ब



ड क मध्यकोण व अ क परिघ कोणाच्या दुप्पट
आहे, हे सिद्ध करावयाचे.

ड मध्यबिंदु व अ क कोनाच्या आंत आ-
हे, असे प्रथमतः मानू. अ, ड सांध, आणि अड
रेषा ड पर्यंत वाढीव. बड, अड बरोबर आहे,
ह्या करितां (१ बू० ५ व्या सि० प्र०) अबड
कोन व अड कोनाबरोबर आहे, आणि ह्याकरितां
अबड आणि ब अड हे दोन्ही कोन मिळून व -
अड कोनाच्या दुप्पट आहेत. (१ बू० २१ व्या
सि० प्र०) बड ई कोन अबड आणि ब अ -
ड ह्या दोन कोनांच्या बेरजे बरोबर आहे, ह्याकरितां

बड ई कोन ही बअड कोनाच्या दुप्पट आहे
 ह्या प्रमाणेंच कड ई कोन कअई कोनाच्या
 दुप्पट आहे, असें सिद्ध होईल, ह्याकरितां बड -
 क सगळा कोन बअक सगळ्या कोनाच्या दु-
 प्पट आहे, हे स्पष्ट आहे.

आतां ड मध्य बअक परिघ कोनाच्या
 बाहेर आहे, असें मानूं.

अ, ड सांध, आणि अ -

ड, ई पर्यंत वाढीव वि -

द्यार्थ्यानें बरील सिद्धता



लक्षांत आणिली असतां, त्याच्या नजरेस तेव्हांच
 येईल, कीं ईडक कोन ईअक कोनाच्या दु-
 प्पट आहे, व ईडब कोन ईअब कोनाच्या
 दुप्पट आहे. आतां बडक कोन ईडक आणि
 ईडब ह्या दोन कोनांच्या वजाबाकी बरोबर आहे,
 व बअक कोन ईअक आणि ईअब ह्या
 दोन कोनांच्या वजाबाकी बरोबर आहे, तेव्हां ब-
 डक कोन बअक कोनाच्या दुप्पटी बरोबर आहे,
 हे स्पष्ट आहे.

२१ सिद्धांत. प्रमेय.

जे कोन एकाच वर्तुलखंडांत असतात ते परस्पर बरोबर असतात.

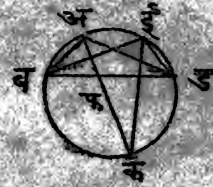
अब कड ई वर्तुळाच्या ब अ ई ड खंडांत ब अ ड आणि ब ई ड हे दोन कोन आहेत, त्यास ते परस्पर बरोबर आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.



अब कड ई वर्तुळाचा फ मध्यबिंदु काढ. ब अ ई ड वर्तुलखंड अर्धवर्तुलापेक्षा मोठा आहे असें प्रथमतः मानूं. ब, फ आणि फ, ड सांध. ब फ ड कोन मध्यकोण आहे, व ब अ ड कोन परिघकोण आहे, आणि ते दोन्ही एकेच कोंसावर आहेत, ह्या करितां (३ वू० २० व्या सि० प्र०) ब फ ड कोन ब अ ड कोनाच्या दुप्पट आहे. आणि ह्याच कारणास्तव ब फ ड कोन ब ई ड कोनाच्याही दुप्पट आहे, ह्या करितां ब अ ड कोन ब ई ड कोनाबरोबर आहे, हें उघड आहे.

आतां ब अ ई ड वर्तुलखंड अर्धवर्तुला
पेक्षां मोठा नाहीं असें मा-

नूं. ब अ ई ड ह्या वर्तुल
खंडांत ब अ ड आणि
ब ई ड असे दोन कोन आ-



हेत, त्यास ते परस्परबरोबर आहेत, हे सिद्ध करावयाचे.

अ, फ सांध. अ, फ रेष क पर्यंत वाढीव,
आणि क, ई सांध. ब अ ड क कोंस अर्ध व-
र्तुलापेक्षां मोठा आहे, ह्या करितां मागील प्रकारा-
प्रमाणें ब अ क कोन ब ई क कोनाबरोबर आ-
हे, आणि तेसच क ब अ ड खंड अर्धवर्तुला-
पेक्षां मोठा आहे, ह्या करितां क अ ड कोन क-
ई ड कोनाबरोबर आहे, म्हणून सगळ्या ब अ-
ड कोन सगळ्या ब ई ड कोनाबरोबर आहे.

२२ सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळांत चतुष्कोणाकृति काढली असतां
तिच्या समोरासमोरीच्या कोनांची बेरीज दोन काट
कोनांबरोबर असते.

अबकड वर्तुळांत अबकड एक चतु

कोणाकृति आहे, त्यास तिचे समोरासमोरच्या कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, हे सिद्ध करावयाचे.

अ, क आणि ब, ड बिंदु सांध. अबक त्रिकोणाच्या क अ ब, अबक, आणि ब क अ ह्या तीन कोनांची बेरीज

(१ ब्रू० ३२ व्या सि० प्र०) दोन काटकोनांबरोबर आहे. (१ ब्रू०



२१ व्या सि० प्र०) अडब कोन अकब कोनाबरोबर आहे, कारण ते दोन्ही कोन एकाच अडकब वर्तुल खंडांत आहेत, तसेच बडक कोन कअब कोनाबरोबर आहे, म्हणून सगळा अडक कोन कअब आणि अकब ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबरोबर आहे. दोन्ही पेट्यांत अबक कोन मिळीव, म्हणजे अडक आणि अकब ह्या दोन कोनांची बेरीज कअब, अकब, आणि अबक ह्या तीन कोनांच्या बेरजेबरोबर होईल, पण ह्या तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, ह्याकरिता

अडक आणि अबक ह्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, हे सिद्ध ह्या प्रमाणेच उअब आणि उकब ह्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, हे सिद्ध होतें.

२३ सिद्धान्त प्रमेय.

एकाच रेषेवर तिचे एकेच अंगास वर्तुळांचे दोन सजातीय खंड कदापि निराळे राहावयाचे नाहीत, ते परस्परांशीं मिळतील.

निराळे राहतील असें म्हटल्यास, अब रेखेवर तिचे एकेच अंगास

अकब आणि अड-

ब हे, वर्तुळांचे सजातीय

दोन खंड निराळे राहाना-

त असें मानूं. अकब वर्तुळ अडब वर्तुळ-

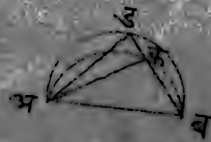
ळास अ आणि ब ह्या दोन बिंदुस्थलीं छेदिते,

ह्याकरितां (३ बू० १० व्या नि० प्र०) हीं दोन

वर्तुळे अ आणि ब ह्या दोन बिंदूखेरीज तिसरे

बिंदूंत परस्परांस छेदतील असें शक्य नाही, म्ह-

णून, कोणता तरी एक वर्तुळखंड दुसरे वर्तुळखंडांज-



अबश्य पडेल. अ कब वर्तुल खंड अडब
वर्तुल खंडांत पडतो असें मानूं. ब कड रेष का-
द, आणि अ, ड आणि अ, क सांध. अ कब
खंड अडब खंडाशीं सजातीय आहे, ह्या करितां
(३ बू० ८ व्या सि० प्र०) अ कब कोन अ-
डब कोनाबरोबर आहे, परंतु (१ बू० १६ व्या सि०
प्र०) बाहेरील कोन आंतील पलिकडच्या कोनाब-
रोबर होणें अशक्य.

२४ सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळांचे जे सजातीय खंड समान रेषांवर
असतात ते परस्पर बरोबर असतात.

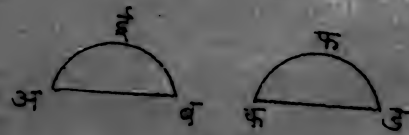
अब आणि कड ह्या दोन समान रेषांवर
अईब आणि क फड हे दोन वर्तुळखंड आ-
हेत, त्यास अईब वर्तुल खंड क फड वर्तुळ
खंडाबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

जर अई-

ब खंड क फड

खंडावर असा ठे-

विला, कीं अ विंदु

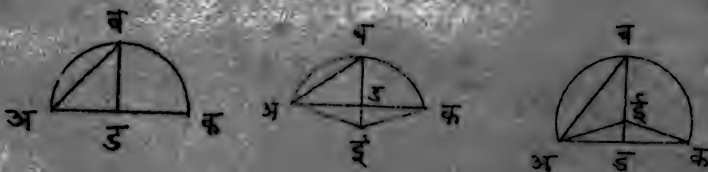


क बिंदूवर पडेल, आणि अ ब रेघ क ड रेघे-
वर पडेल, तर ब बिंदु ड बिंदूशीं मिळून जाईल,
कारण अ ब रेघ क ड रेघेबरोबर आहे, आणि
ह्यास्तव अ ब रेघ क ड रेघेशीं मिळतें असें झालें,
म्हणून (१ बू० २७ व्या सि० प्र०) अ ई ब खंड
क फ ड खंडाशीं मिळाल्या शिवाय राहणार नाही,
ह्या करितां अ ई ब खंड क फ ड खंडाबरोबर
आहे.

२५ सिद्धांत. कृत्य

विवक्षित वर्तुलखंडावरून ज्या वर्तुळाचा तो
खंड आहे तें वर्तुळ काढावयाचें.

अ ब क एक वर्तुळखंड आहे, त्यास तो खं-
ड ज्या वर्तुळाचा आहे तें वर्तुळ काढावयाचें.



(१ बू० १० व्या सि० प्र०) अ क रेघेचे ड स्थळीं
दोन समान भाग कर, (१ बू० ११ व्या सि० प्र०)

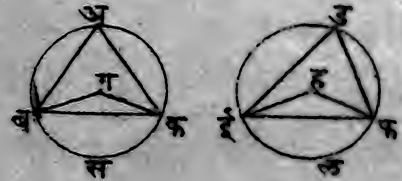
पेक्षा मोठा होईल, हें सर्व उघडच आहे.

२६ सिद्धांत प्रमेय.

समान वर्तुळांत समान कोन समान कोंसां -
वर असतात, मग ते कोन परिघकोण असोत किं-
वा मध्यकोण असोत.

अबक आणि डईफ हीं दोन समान
वर्तुळे आहेत. त्यांत बगक आणि ईहफ
हे मध्य कोण समान आहेत, तसेंच वअक
आणि ईडफ हे परिघ कोण परस्पर बरोबर
आहेत, त्यास ते

कोन समान कों-
सांवर आहेत, म्ह-
णजे बसक



कोंस ईलफ कोंसाशीं समान आहे, हें सिद्ध करा-
वयाचें.

ब, क आणि ई, फ सांध. अबक आ-
णि डईफ हीं दोन वर्तुळे समान आहेत, म्हणू-
न त्यांच्या मध्यबिंदूपासून परिघपर्यंत काढलेल्या
रेषा परस्पर बरोबर आहेत, यास्तव ब ग आणि

गक ह्या बाजू ई ह आणि ह फ ह्या बाजूंशीं
 बरोबर आहेत, व ब ग क अंतरकोन ई ह -
 फ अंतरकोनां बरोबर आहे, ह्यास्तव (१ बू० ४
 व्या सि० प्र०) ब ग क त्रिकोणाची ब क बा
 जू ई ह फ त्रिकोणाच्या ई फ बाजू बरोबर
 आहे. अ परिघकोण ड परिघकोणा बरोबर
 आहे, ह्याकरितां (३ बू० ८ व्या व्या० व०) ब
 अ क आणि ई ड फ वर्तुळ खंड सजातीय आ-
 हेत, परंतु ते खंड समान रेखांवर आहेत, ह्यास्तव
 (३ बू० २४ व्या सि० प्र०) ते परस्पर बरोबर आ-
 हेत. अ ब क वर्तुळ ड ई फ वर्तुळा बरोबर
 आहे, ह्यास्तव ब स क खंड ई ल फ खंडा
 बरोबर आहे, हे अगदीं उघड आहे, म्हणून ब
 स क कोंस ई ल फ कोंसा बरोबर आहे, हे सिद्ध.

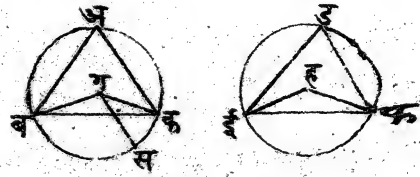
२७ सिद्धांत प्रमेय.

समान वर्तुळांत समान कोंसांवर जे कोन
 असतात ते समान असतात, मग ते कोन परिघ-
 कोण असोत किंवा मध्यकोण असोत.

अ ब क आणि ड ई फ ह्या दोन

समान वर्तुळांत बगक आणि ईहफ हे मध्यकोण व ब-

अक आणि ईडफ हे परिघकोण बक



आणि ईफ ह्या समान कोंसांवर आहेत, त्यास बगक मध्यकोण ईहफ मध्यकोणाबरोबर आहे, व बअक परिघकोण ईडफ परिघकोणाबरोबर आहे, हे सिद्ध करावयाचे.

बगक कोन ईहफ कोनाबरोबर आहे, असे म्हटल्यास बअक कोन ईडफ कोनाबरोबर आहे, हे (३ बू० २० व्या सि० व०) स्पष्ट आहे, परंतु ते कोन परस्पर बरोबर नाहीत असे म्हटल्यास, त्यांपैकीं एक कोणता तरी दुसऱ्यापेक्षा मोठा असलाच पाहिजे. त्यास बगक कोन ईहफ कोनापेक्षा मोठा आहे, असें मावूं. बगर घेत ग बिंदूजवळ (१ बू० २३ व्या सि० प्र०) ईहफ कोनाची समान असा बगस कोन कर. ३ बू० २६ व्या सिद्धांतांत असे सांगितले आहे, कीं समान मध्यकोण समान कोंसांवर

असतात, ह्या करितां ब स कौंस ई फ कौंसाबरो -
 बर आहे, पण ब क कौंस ई फ कौंसाबरोबर आ-
 हे, ह्या करितां ब स कौंस ब क कौंसाबरोबर आहे,
 परंतु लहान कौंस मोठ्या कौंसाबरोबर होणें अशक्य,
 म्हणून ब ग क आणि ई ह फ कोन असमान
 आहेत, असें म्हणतां येत नाहीं, त्यास ब ग क कोन
 ई ह फ कोनाबरोबर असलाच पाहिजे. ब अ-
 क कोन ब ग क कोनाच्या अर्धाबरोबर आहे,
 तसेंच ई ड फ कोन ई ह फ कोनाच्या अर्धा
 बरोबर आहे, ह्यास्तव ब अ क कोन ई ड फ
 कोनाबरोबर आहे, हे सिद्ध.

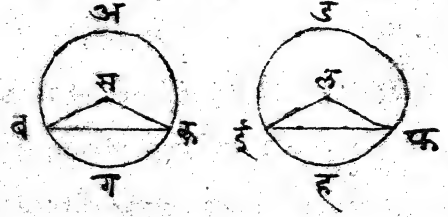
२८ सिद्धांत. प्रमेय.

समान वर्तुळांत समान ज्या समान कौंस करि-
 तात; महत्तर कौंस महत्तर कौंसाबरोबर होतो, आ-
 णि लघुतर कौंस लघुतर कौंसाबरोबर होतो.

अ ब क आणि ड ई फ ही दोन समान
 वर्तुळां आहेत, आणि ब क आणि ई फ ह्या दोन
 समान ज्या आहेत, त्यास त्या ज्या समान कौंस
 करितात; महत्तर ब अ क कौंस महत्तर ई ड फ

कोंसाबरोबर आहे, व लघुतर बगक कोंस, लघु -
तर ई ह फ कों
साबरोबर आहे, हे
सिद्ध करून बघ्याचें.

(१ बू० ३ व्या



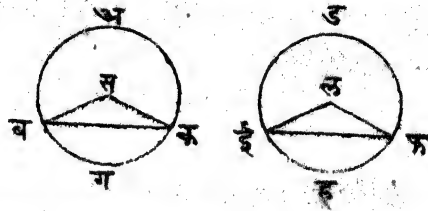
सि० प्र०) अब क आणि उ ई फ ह्या दोन
वर्तुळांचे स आणि ल मध्य काढ, आणि ब, स
स, क ई, ल आणि ल, फ सांध. आतां अब -
क आणि उ ई फ हीं वर्तुळें बरोबर आहेत,
ह्या करितां त्यांच्या त्रिज्याबरोबर आहेत, म्हणून
बस, स क, ई ल आणि ई फ ह्या बाजूबरो-
बर आहेत व ब क ज्या ई फ जे बरोबर आहे,
ह्या करितां (१ बू० ८ व्या सि० प्र०) बसक कोन
ई ल फ कोनाबरोबर आहे. (२ बू० २६ व्या सि०
प्र०) समान मध्यकोण समान कोंसांवर असतात,
ह्या करितां ब ग क कोंस ई ह फ कोंसाबरोबर
आहे, आतां सगळें अब क वर्तुळ सगळ्या उ ई -
फ वर्तुळाबरोबर आहे, ह्या करितां ब अ क कोंस
ई उ फ कोंसाबरोबर आहे, हे उघड आहे.

२९ सिद्धांत. प्रमेय.

समान वर्तुळांत समान कोंसांच्या ज्या समान असतात.

अबक आणि डईफ दोन समान वर्तुळें आहेत, आणि त्यां मध्ये बगक आणि ईहफ हे दोन समान कोंस आ-

हेत, त्यास त्यांच्या बक आणि ई-



फ ज्या परस्पर समान आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

(१ बू० ३ व्या सि० प्र०) अबक आणि डईफ वर्तुळांचे स आणि ल मध्यबिंदु काढ. ब, स क, स ई, ल आणि ल, फ सांध. समान वर्तुळांच्या त्रिज्या परस्पर बरोबर असतात, ह्याकरितां ब स आणि क स त्रिज्या ई ल आणि ल फ त्रिज्या बरोबर आहेत. बगक कोंस ईहफ कोंसाबरोबर आहे, ह्यास्तव (१ बू० २७ व्या सि० प्र०) बसक मध्यकोण ईलफ मध्यकोणाबरोबर आहे, त्यास बसक आणि

ईलफ ह्या दोन त्रिकोणांत बस आणि कस ह्या दोन बाजू ईल आणि लफ ह्या दोन बाजूंबरोबर आहेत, व बसक अंतरकोन ईलफ अंतरकोन बरोबर आहे, म्हणून (१ बू० ४ व्या सि० प्रमाणे) बक बाजू ईफ बाजूबरोबर आहे, त्यास बगक कोंसाची बक ज्या त्या कोंसाबरोबरचा जो ईहफ कोंस त्याच्या ईफ ज्ये बरोबर आहे, हे सिद्ध.

३० सिद्धांत. कृत्य.

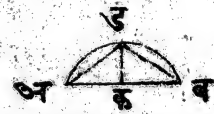
विवक्षित कोंसाचे दोन समान भाग करावयाचे.

अबड एक कोंस आहे, त्यास त्याचे दोन समान भाग करावयाचे.

अबड कोंसाची

अ आणि ब टोंके

अबरेचेने सांध.



(१ बू० १० व्या सि० प्र०) अब ज्येचे क स्थ-

लीं दोन समान भाग कर, क बिंदूतून अब ज्येवर

कड लंब कर, आणि अड आणि बड सांध.

अकड आणि बकड ह्या दोन त्रिकोणांत

अक बाजू बक बाजूबरोबर आहे, कड बाजू

होहों त्रिकोणांस साधारण आहे, आणि अकड
 अंतरकोन बकड अंतरकोनाबरोबर आहे, ह्या
 करितां (१ ब्रू० ४ व्या सि० प्र०) अड ज्याबड
 ज्ये बरोबर आहे. समान ज्या समान कोंस करितात,
 आणि त्या कोंसांपैकी मोठा कोंस मोठ्या कोंसाबरो-
 बर असतो, आणि धाकटा कोंस धाकट्या कोंसा-
 बरोबर असतो, असें १८ व्या सिद्धांतांत सांगितले
 आहे, व अड आणि बड हे दोन्ही कोंस लहान
 आहेत, कारण कड रेघ (१ ब्रू० १ व्या सि० कु०
 प्र०) मध्यांतून जाते, ह्यास्तव अड कोंस बड
 कोंसाबरोबर आहे, म्हणून अड व कोंसाबेड
 स्थलीं दोन समान भाग झाले, हे सिद्ध.

३१ सिद्धांत प्रमेय.

अर्धवर्तुलांत जो कोन होतो, तो काटकोन
 असतो, अर्धवर्तुलापेक्षां मोठ्या खंडांत जो कोन
 होतो, तो काटकोनापेक्षां लहान असतो, आणि अ-
 र्धवर्तुलापेक्षां लहान खंडांत जो कोन होतो, तो का-
 टकोनापेक्षां मोठा होतो.

अ ब क एक वर्तुळ आहे, त्याचा व्यास

ब क व मध्यबिंदु ई

आहे. अ ब क वर्तुळा-

चे अ क रेघेनें अ ब-

क आणि अ ड क अ-

से दोन खंड केले आहेत, ब, अ, अ, ड, आणि

क, ड बिंदु सांधले आहेत, त्यास अ ब क अर्ध

वर्तुळांतील ब अ क कोन काटकोन आहे, अ-

र्धवर्तुलापेक्षां मोठा जो अ ब क खंड त्यांतील

अ ब क कोन काटकोनापेक्षां लहान आहे, व

अर्धवर्तुलापेक्षां लहान जो अ ड क खंड त्यांती-

ल अ ड क कोन काटकोनापेक्षां मोठा आहे, हे सि-

द्ध करावयाचे. अ, ई सांध, आणि ब अ बाजू फ

पर्यंत वाढीव. अ ई बाजू ब ई बाजू बरोबर आ-

हे, कारण त्या दोन्ही बाजू त्रिज्या आहेत, या करितां

(१ बू० ५ व्या सि० प्र०) अ ब ई कोन ब अ ई

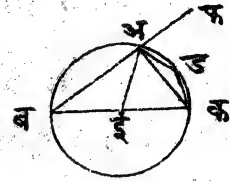
कोनाबरोबर आहे, तसेंच अ ई बाजू ई क बा-

जूबरोबर आहे, म्हणून अ क ई कोन ई अ क

कोनाबरोबर आहे, यास्तव सगळा ब अ क कोन

अ ब क आणि अ क ब या दोन कोनांच्या

बरे जे बरोबर आहे. अ ब क त्रिकोणाचा बाहे-



रील फ अ क कोन अ ब क आणि अ क ब
ह्यांचे बेरजे बरोबर आहे, ह्या करितां ब अ क कोन
फ अ क कोनाबरोबर आहे, ह्या करितां ते दोन्ही
कोन काटकोन आहेत, ह्यास्तव अर्धवर्तुलांत जो
कोन होतो तो काटकोन असतो, हें सिद्ध.

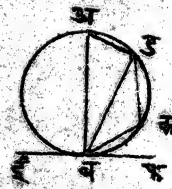
(१ बू० ३२ व्या सि० प्र०) त्रिकोणाच्या
तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बरोबर असते,
तेव्हां अबक त्रिकोणांत ब अ क कोन काट-
कोन आहे, ह्यास्तव अबक आणि ब क अ
ह्या दोन कोनांची बेरीज एक काटकोनाबरोबर आहे,
तेव्हां अबक कोन काटकोनापेक्षां कमी आहे, हें
स्पष्टच आहे, म्हणून अर्धवर्तुलापेक्षां मोठ्या अब-
क खंडांतील अबक कोन, काटकोनापेक्षां ल-
हान आहे, हें सिद्ध. वर्तुलांतील चतुष्कोनाकृतीच्या
समोरासमोरच्या कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बरो-
बर असते, असें १ बू० ३२ व्या सिद्धांतांत सिद्ध केले
आहे, ह्यास्तव अबक ड चतुष्कोनाकृतीच्या अ-
बक आणि अ ड क ह्या दोन कोनांची बेरीज
दोन काटकोनां बरोबर आहे. अबक कोन काट-
कोनापेक्षां लहान आहे, हें सिद्ध केले आहे, तेव्हां अर्ध-

तब अडक कोन काटकोनापेशां मोठा आहे. अ-
डक कोन अर्धवर्तुलापेशां लहान जो अडक खं-
ड त्यांत आहे, ह्या करितां अर्धवर्तुलापेशां लहान खं-
डांत जो कोन होतो, तो काटकोनापेशां मोठा असतो,
हें सिद्ध.

३२ सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळाची स्पर्शरेषा आणि स्पर्शस्थलापासून
केलेली ज्या ह्यांच्यामध्ये जे कोन सांपडतात ते वर्तु-
ळाच्या व्युक्रम खंडांतील कोनांबरोबर असतात.

अबकड वर्तुळाची ईफ स्पर्शरेषा आहे,
आणि ब स्पर्शबिंदूपा-
सून बड ज्या केली
आहे, त्यास ईफ स्पर्शरेषा
आणि बड ज्या ह्यांच्यामध्ये



जे कोन सांपडले आहेत, ते व्युक्रम खंडांतील कोनां
बरोबर आहेत, म्हणजे डबफ कोन ड अबव्यु-
क्रम खंडांतील कोनाबरोबर आहे, व डबई को-
न ड कब खंडांतील कोनाबरोबर आहे, हें सिद्ध
करावयाचें.

डुकब एक चतुष्कोनाकृति आहे, त्यास (३ बू० २२ व्या सि० प्र०) समोरासमोरच्या डु अब आणि डुकब ह्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, (१ बू० १३ व्या सि० प्र०) डुबई आणि डुबफ ह्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, ह्यास्तब बअडु आणि डुकब हे दोन कोन मिळून डुबई आणि डुबफ ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबरोबर आहेत, बअडु कोन डुबफ कोनाबरोबर आहे, असें पूर्वी सिद्ध केलेंच आहे, ह्या करितां ते समान कोन दोन्ही पेट्यांतून काढून टाकिलें असतां, बाकीचा डुबई कोन डुकब कोनाबरोबर होईल, आणि डुकब कोन डुकब व्युत्क्रम खंडात आहे.

३३ सिद्धांत. कृत्य.

ज्यांतील कोन विवक्षित कोनाबरोबर होईल असा एक वर्तुळ खंड विवक्षित रेघेवर काढावयाचा.

एक विवक्षित अब रेघ आहे, आणि क एक विवक्षित कोन आहे, त्यास अब रेघेवर असा

एक वर्तुल खंड काढावया
चा, कीं ज्यांतील कोन क
कोनाबरोबर होईल.



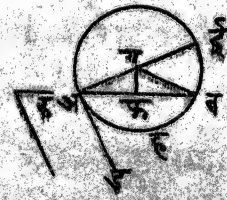
क कोन काटको-

न आहे, त्या पक्षीं फ स्थलीं अ ब रेघेचे दोन स-
मान भाग कर, आणि फ मध्यकत्पून फ अ
त्रिज्येनें अ ह ब अर्धवर्तुल काढ, ज्यांतील अ ह-
ब कोन (१ बू० ३१ व्या सि० प्र०) काटकोन आ-
हे.

परंतु क कोन काटकोन नसल्यास, (१ बू०
२३ व्या सि० प्र०) अब रेघेन अ बिंदूजवळ
क कोना एवढा ब अड कोन कर. अब रेघेचे
फ स्थलीं दोन समान भाग कर.

आणि अड रेघेवर अ बिं-

दूंतून अ ई रेघ लंब
काढ, नंतर फ बिंदूंतून



अ ब वर फ ग रेघ लंब काढ, आणि ब, ग
सांध. अ फ ग आणि ब फ ग ह्या दोन त्रिकोणां-
त अ फ बाजू ब फ बाजू बरोबर आहे, आणि
फ ग बाजू दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे,

आणि अफग अंतरकोन बफग अंतरकोना बरो -
 वर आहे, ह्यास्तव (१ बू० ४ व्या सि० प्र०) अग
 बाजू बग बाजू बरोबर आहे. आतां ग मध्यधरून
 ग अ त्रिज्येनें वर्तुळ काढलें असतां, तें वर्तुळ बबिंदू-
 तून जाईल त्यास ह्या प्रकारचे अवह वर्तुळ काढ.
 अहब वर्तुळाचा व्यास ईअ रेष आहे, हें स्पष्ट
 च आहे. अई व्यासा -

व्या अ टोंकावर अ -

ड रेष लंब आहे, ह्याक -

रितां (३ बू० १६ व्या सि०

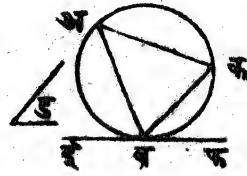


कु० प्र०) अड रेष अवह वर्तुळाची स्पर्श रे-
 षा आहे, तेव्हां अ स्पर्शबिंदूतून अव रेष काढ-
 ली आहे असें म्हणण्यास विंता नाही, ती रेष वर्तुळास
 छेदते, ह्याकरितां ब अड कोन (३ बू० ३२ व्या सि०
 प्र०) अहब व्युक्रमखंडांतील कोनाबरोबर आहे,
 आणि ब अड कोन विवक्षित क कोनाबरोबर
 आहे, ह्यास्तव विवक्षित अ ब रेषेवर, विवक्षित क
 कोनाबरोबर ज्यांतील कोन आहे असा अहब
 वर्तुळखंड काढला आहे.

३४ सिद्धांत. कृत्य.

वर्तुळाचा असा खंड पाडावयाचा कीं त्या खंडांतील कोन विवक्षित कोनाबरोबर होईल.

अबक एक वर्तुळ आहे, आणि दु एक कोन आहे, त्यास अबक वर्तुळाचा असा खंड पाडावयाचा कीं त्यांतील कोन दु कोनाबरोबर होईल.

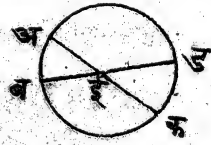


(१ बू० १७ व्या सि० प्र०) अबक वर्तुळास ब बिंदूंत स्पर्शकरील अशी एक ईफ रेघ काढ, आणि (२ बू० २३ व्या सि० प्र०) ईफ रेघेंत ब बिंदूजवळ दु कोना एवढा फबक कोन कर. अबक वर्तुळास ईफ रेघ ब स्थळीं स्पर्शकरीते, आणि ब स्पर्शबिंदूंतून बक ज्या काढली आहे, त्यास्तव (३ बू० २२ व्या सि० प्र०) फबक कोन ब अक व्युक्रम खंडांतील कोनाबरोबर आहे, पण फबक कोन दु कोनाबरोबर आहे, त्यास्तव ज्यांतील कोन दु कोनाबरोबर आहे, असा अबक खंड अबक वर्तुळाचा पाडला असे.

३५ सिद्धांत प्रमेय.

वर्तुळांत ज्या दोन रेषा परस्परांस छेदितात,
त्यांच्या खंडांचे काटकोन चौकोन परस्परबरोबर
असतात.

अबकड वर्तुळांत अक आणि बड
ह्या दोन रेषा परस्परांस
ई स्थळीं छेदितात, त्यास
बडच्या बई आणि
ईड ह्या दोन खंडांचा
काटकोन चौकोन, अक रेषेच्या अई आणि ई
क ह्या दोन खंडांच्या काटकोन चौकोनाबरोबर आहे,
हे सिद्ध करावयाचे.



अक आणि बड ह्या दोन रेषा मध्यबिंदू-
तून जातात त्या पक्षी विनार. अक आणि बड
मध्यबिंदूतून जातात, ह्या करितां ई छेदनबिंदु मध्य
आहे, आणि अई, ईक, बई व डई हे खं
ड परस्परबरोबर आहेत, ह्या करितां अई व ईक
ह्यांचा काटकोन चौकोन, बई आणि ईड ह्यांचा
काटकोन चौकोनाबरोबर आहे, हे उघडन आहे.

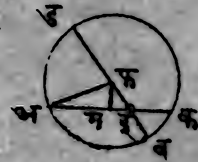
बड रेघ मात्र मध्यांतून जाते, आणि ती
 अक वर लंब होऊन तीस ई स्थळीं छेदते त्या
 पक्षीं. बड रेघेचे फ बिंदूत दोन समान भाग कर.
 फ हा अबकड वर्तु-
 लाचा मध्य होय. अ, फ
 सांध. बड रेघ अक
 जेवर लंब आहे, आणि
 ती मध्यबिंदूतून जाते, ह्याकरितां (३ बू० ३ व्या सि०
 प्र०) अ ई खंड क ई खंडाबरोबर आहे. बड
 रेघेचे दोन समान भाग फ बिंदूत झाले आहेत,
 आणि असमान दोन भाग ई स्थळीं झाले आहेत,
 ह्याकरितां (३ बू० ५ व्या सि० प्र०) फब चा वर्ग
 ड ई आणि ब ई ह्यांचा काटकोन चौकोन आणि
 फ ई चा वर्ग, ह्यांबरोबर आहे. फब, अफ बरो-
 बर आहे, ह्याकरितां अफे, ड ई आणि ब ई
 ह्यांचा काटकोन चौकोन, व फ ई चा वर्ग, ह्यांबरो-
 बर आहे. (१ बू० ४७ व्या सि० प्र०) अफ चा
 वर्ग अ ई आणि फ ई ह्यांबरोबर आहे, कारण
 अ ई फ काटकोन आहे, ह्यास्तव अ ई आणि
 फ ई मिळून ड ई आणि ब ई ह्यांचा काटकोनचो-



कोन आणि फईचा वर्ग ह्यां बरोबर आहेत. दोन्ही पे-
 त्यांस फई साधारण आहे, तो काढून टाकिला अ-
 सतां अई, डई आणि बई ह्यांच्या काटकोनचौ-
 कोनाबरोबर राहिल, म्हणजे अई आणि ईक
 ह्या खंडांचा काटकोनचौकोन डई आणि बई ह्या
 खंडांच्या काटकोनचौकोनाबरोबर आहे हे सिद्ध.

बडू मात्र मध्यविंदूतून जाते, आणि ती अ-
 क रेघेस ई स्थळीं छेदते, पण ती तीव्रलंब होत ना-
 हीं त्यापक्षां पूर्वी प्रमाणेंच

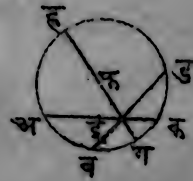
बडू रेघेचे फ स्थळीं
 होत समान भाग कर. फ
 हा मध्य होय. अ, फ



सांध, आणि (१ बू० १२ व्या सि० प्र०) फ विंदूपासून
 अकबर फ ग लंब काढ. (१ बू० ३ व्या सि० प्र०)
 अ ग, क ग बरोबर आहे, आणि ह्या करितां अ-
 गै, अई x ईक काटकोनचौकोन आणि गई
 ह्यां बरोबर आहे. दोन्ही पेच्यांत ग फे मिळीव, तेव्हां
 अगै आणि फगै मिळून अई x ईक काटकोन
 चौकोन गई आणि फगै ह्यां बरोबर आहेत. अ-
 गै, आणि फगै मिळून अफे बरोबर आहेत, तसेंच

फगो आणि ग ई मिळून फई बरोबर आहे,
 त्यास अफे, अ ई × ई क काटकोनचौकोन आ-
 णि फई ह्यांबरोबर आहे. अफे फबे बरोब-
 र आहे, म्हणून फबे अ ई × ई क काटकोनचौ-
 कोन आणि फई ह्यांबरोबर आहे, फबे, ई ड ×
 ई ब काटकोनचौकोन आणि फई ह्यांबरोबर
 आहे, ह्याकरितां ई ड × ब ई काटकोनचौकोन आणि
 फई मिळून अ ई × ई क काटकोनचौकोन आ-
 णि फई ह्यांबरोबर आहेत. दोन्ही पेढ्यांस फई
 साधारण आहे, तो काढून वाकिला असतां, ई ड ×
 ब ई काटकोनचौकोन अ ई × ई क काटकोन
 चौकोनाबरोबर राहिल.

दोन्ही रेखा वर्तुळ मध्यांतून जात नाहीत, त्या
 पक्षां. अबकड वर्तुळाचा फ मध्यबिंदु काढ,
 आणि अक आणि ब-
 ड ह्यांच्या ई छेदनबिंदू-
 तून ह फ ई ग एक व्या-
 स काढ. मागे सिद्ध केले
 आहे, कीं अ ई × ई क काटकोनचौकोन ह ई ×
 ई ग काटकोनचौकोनाबरोबर आहे, तसेंच ड-



ई × बई काटकोन चौकोन ह ई × ई ग काट-
कोन चौकोना बरोबर आहे. ह्यावरून स्पष्टच दिसते,
कीं अ ई × ई क काटकोन चौकोन बई × ई ड
काटकोन चौकोना बरोबर आहे.

३६ सिद्धांत प्रमेय.

कोणत्याही वर्तुळाच्या बाहेरल्या अंगास एक
बिंदु घेऊन त्यापासून त्या वर्तुळास एक स्पर्शरेषा
व एक छेदनरेषा काढली तर छेदनरेषा आणि वर्तु-
ळा बाहेरील तिचा भाग ह्यांचा काटकोन चौकोन
स्पर्शरेषेच्या वर्गाबरोबर होतो.

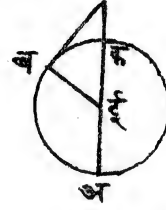
अ ब क एक वर्तुळ आहे, त्याच्या बाहेरल्या
अंगास ड बिंदु घेऊन त्यापासून त्या वर्तुळास ड-
ब स्पर्शरेषा केली आहे व ड क अ एक छेदनरेषा
केली आहे, त्यास ड क अ छेदनरेषा आणि ति-
चा वर्तुळा बाहेरील ड क भाग ह्यांचा काटकोन चौ-
कोन ड ब स्पर्शरेषेच्या वर्गाबरोबर आहे, हे सिद्ध-
करावयाचे.

ड क अ छेदनरेषा ई वर्तुळमध्यबिंदूतून जा-
ते त्यापक्षां ब, ई सांध. (३ बू० १० व्या सि० प्र०)

डू ब ई कोन काटकोन आहे. अ क बाजूचे ई स्थळीं दोन समान भाग करून, ती डू बिंदू पर्यंत वाढविली आहे, ह्या करितां

(२ बू० ६ व्या सि० प्र०)

अ डू × क डू काटकोन चौकान आणि क ई



मिळून डू ई बरोबर आहेत. क ई, ब ई बरोबर आहे, ह्या करितां अ डू × क डू काटकोन चौकोन आणि ब ई मिळून डू ई बरोबर आहेत. (१ बू० ४७ व्या सि० प्र०) डू ई, ब डू आणि ब ई ह्यां बरोबर आहे, ह्यास्तव अ डू × क डू काटकोन चौकोन आणि ब ई, ब डू आणि ब ई ह्यां बरोबर आहेत, ब ई दोन्ही पैक्यांस साधारण आहे, ह्या करितां तो दोही कडून काढून टाक, तेव्हां अ डू × क डू काटकोन चौकोन ब डू बरोबर आहे, हें सिद्ध.

डू क अ छेदन रेखा ई मध्या बिंदूतून जात नाही, त्या पक्षीं विचार. (१ बू० १२ व्या सि० प्र०)

अ क रेघेवर ई मध्यागासून ई फ लंब कर, आणि ई, ब, ई, क आणि ई, डू सांध. (३ बू० ३ व्या सि० प्र०) ई फ रेघ अ क ज्येचे दोन

समान भाग करते, कारण ई फ रे घ ई मध्यांतून अक
वरलंब केली आहे, म्हणून अ फ रे घ फ क बरोबर आहे.

अ क रे घेचे फ स्थळी

दोन समान भाग झाले आ-

हेत, व ती ड बिंदू पर्यंत

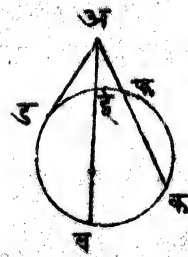
बाढविलेली आहे, ह्या क-



रितां फ ड, अ ड × क ड काटकोन चौकोन आ-
णि फ के ह्यां बरोबर आहे, दोन्ही पेढ्यांत फ ई
मिळीव, तेव्हां फ ड आणि फ ई, अ ड × क ड
काटकोन चौकोन फ के आणि फ ई ह्यां बरोबर
आहेत. ड फ ई कोन काटकोन आहे, ह्यास्तव
फ ड आणि फ ई हे ई डे बरोबर आहेत, तसेंच
फ के आणि फ ई क ई बरोबर आहेत, म्हणून
ई डे अ ड × क ड काटकोन चौकोन आणि क-
ई ह्यां बरोबर आहे. क ई, ब ई बरोबर आहे, ह्या
करितां ई डे अ ड × क ड काटकोन चौकोन आ-
णि ब ई ह्यां बरोबर आहे, पण ड ब ई कोन काट-
कोन आहे, ह्याकरितां ब ड आणि ब ई, ई डे
बरोबर आहे, त्यास ब ड आणि ब ई, अ ड ×
क ड काटकोन चौकोन आणि ब ई ह्या बरोबर

आहेत. दोन्ही पेक्षांस बई साधारण आहे, त्यास
तो काढून टाकिला असतां बडै वर्गाबरोबर अ-
ड \times कड काढकोन चौकोन राहतो, हे सिद्ध.

कु० चवुळाबाहेर एक बिंदु घेऊन त्यापासून दोन
छेदनरेषा काढल्या असतां, त्या छेदनरेषा आणि त्यां-
चे बाहेरील भाग ह्यांचे काढकोन चौकोन परस्परबरो-
बर होतात. बक फई
चवुळाच्या बाहेर अ बिं-
दु घेऊन त्यापासून अई-
व आणि अफक दोन
छेदनरेषा केल्या आहेत,



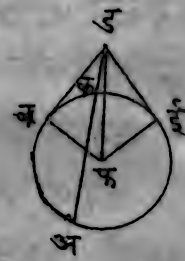
त्यास अब \times अई काढकोन चौकोन, अक
 \times अफ काढकोन चौकोनाबरोबर आहे, हे सिद्ध क-
रावयाचें. अ पासून अड सर्वरेषा काढ. अड
अब \times अई काढकोन चौकोनाबरोबर आहे.
वसेंच अडै अक \times अफ काढकोन चौकोना
बरोबर आहे, यास्तव अब \times अई काढकोन चौ-
कोन अक \times अफ बरोबर आहे, हे सिद्ध.

३७ सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळाबाहेर एक बिंदु घेऊन त्यापासून एक छेदनरेषा काढली व वर्तुळास भिळणारी अशी एक रेषा काढली, आणि जर ती छेदनरेषा आणि तिचा बाहेरील भाग ह्यांचा काटकोन चौकोन वर्तुळास भिळणाऱ्या रेषेच्या वर्गाबरोबर होईल तर ती रेषा त्या वर्तुळाची स्पर्शरेषा होय.

अबकई एक वर्तुळ आहे, आणि त्याच्या बाहेर एक ड बिंदु घेऊन त्यापासून डकअ छेदनरेषा काढली आहे, आणि डब रेषा वर्तुळास भिळणारी काढली आहे, आ-

णि अड × कड काटकोन चौकोन बडच्या वर्गाबरोबर आहे, त्यास बड रेषा स्पर्शरेषा आहे,



हें सिद्ध करावयाचें. ड बिंदूपासून अबक वर्तुळास (३बू० १७ व्या सि० प्र०) डई स्पर्शरेषा काढ. फ मध्यबिंदु काढ, आणि फ, ई फ, ड आणि फ, ब सांध. (३बू० १८ व्या सि० प्र०) फई डकोन

काटकोन आहे. ड अ रेघ अबक वर्तुळास
छेदते, आणि ड ई त्यास स्पर्शकरिते, ह्या करितां (३
बू० २६ व्या सि० प्र०) अड × कड काटकोनचौ-
कोन ड ई बरोबर आहे, आणि अड × कड काटकोनचौ-
कोन ड बे बरोबर आहे, हे गृहीत आहे, ह्या करितां ड -
ई ड बे बरोबर आहे, म्हणून ड ई बडु बरो-
बर आहे. ड ब फ आणि ड ई फ ह्या दोन त्रिको-
णांत ड ब, ड ई बरोबर आहे, ब फ, ई फ बरो-
बर आहे, कारण त्या दोन्ही त्रिज्या आहेत, आणि
ड फ दोहोंस साधारण आहे, ह्या करितां (१ बू० ८
व्या सि० प्र०) ड ब फ कोन ड ई फ कोना बरोबर
आहे, पण ड ई फ कोन काटकोन आहे, ह्या करि-
तां ड ब फ कोनही काटकोन आहे. ब फ त्रिज्या
वर बडु ठंब आहे, ह्या करितां (२ बू० १६ व्या सि०
प्र०) ड ब रेघ अबक वर्तुळास स्पर्श करिते, हे
सिद्ध.

कु० ह्यावरून सिद्ध होतें, कीं एके बिंदूपासून
वर्तुळास दोन स्पर्शरेषा केल्या असतां त्या बरोबर
असतात.

३ बुकाचे प्रश्न.

१ वरतुलमध्यां वून जाणारी जी रेघ ज्याचे दोन समान भाग करिते किंवा तीवर लंब होते, ती रेघ त्या ज्येश्ठी ज्या दुसऱ्या ज्या समांतर असतात, त्यांचे ही समान दोन दोन भाग करिते, व त्यांवर लंब होते.

२ जीं दोन वरतुळें परस्परांस छेदितात, त्या वरतुळांचे मध्यबिंदूस सांधणारी रेघ, त्यांच्या छेदन बिंदूस सांधणाऱ्या रेघेवर लंब होते, आणि ती निचे समान दोन भाग करिते.

३ दोन वरतुळांनीं परस्परांस छेदिलें असतां, आणि त्यांच्या एका छेदनबिंदूपासून दोन्ही वरतुळांत दोन व्यास काढिले असतां, त्या व्यासांची दुसरी टोंके आणि वरतुळांचा दुसरा छेदनबिंदु हीं तिन्ही एका सरल रेषेत येतात.

४ वरतुळांत दोन समांतर ज्यांचे जी रेघ समान दोन दोन भाग करिते, ती त्यांवर लंब होते.

५ दोन समकेंद्र वरतुळांस छेदून जाणारी अशी एक रेघ केली असतां, त्या रेघेचे त्या वरतुळांच्यामध्ये जे भाग सांपडतात, ते परस्पर बरोबर असतात.

६. वर्तुलमध्यांतून जाणें, ज्येचे दोन समान भाग करणें, तीवर लंब असणें, ज्ये वरील मध्यकोणाचे दोन समान भाग करणें, आणि ज्येच्या कोंसाचे दोन समान भाग करणें, ह्या पांच गुणांपैकीं दोन गुण ज्या रेघेचे अंगीं असतात तिच्या अंगीं इतर तीन गुण असतात.

७. कोणत्याही एका वर्तुळाच्या त्रिज्येवर वर्तुळ काढलें असतां हें वर्तुळ आणि पाहिलें वर्तुळ हीं ज्या बिंदूंत मिळतात, त्या बिंदूंतून पाहिलें वर्तुळांत ज्या काढली असतां, त्या ज्येचे दुसरें वर्तुळ दोन समान भाग करितें, म्हणजे त्या ज्येचे दुसरे वर्तुळाच्या कोंसावर दोन भाग समान होतात.

८. वर्तुळांतील चतुष्कोणाकृतीचा बाहेरील कोन आंतील पळीकडच्या कोनाबरोबर असतो.

९. वर्तुळांत समांतर ज्या केल्या असतां, त्यांच्या मध्ये जे कोंस सांपडतात, ते परस्पर बरोबर असतात.

१०. जीं दोन वर्तुळें परस्परांस स्पर्श करितात, मग तीं परस्परांस बाहेरून स्पर्शकरोत किंवा एक दुसऱ्याच्या आंत असून त्यास स्पर्श करो, त्यांच्या स्पर्श

बिंदूतून दोन रेखा काढल्या असतां, त्यांच्या मध्ये जे वर्तुळांचे कोंस सांपडतात, त्यांच्या ज्या परस्पर समांतर असतात.

११ वर्तुळांत ज्येश्ठीं स्पर्शरेखा समांतर केली असतां त्यांच्यामध्ये जो कोंस सापडतो त्याचे स्पर्शस्थलीं दोन भाग समान होतात.

१२ दोन समकेंद्र वर्तुळांमध्ये मोठ्या वर्तुळाची जी ज्या लहान वर्तुळास स्पर्शकारिते तिचे स्पर्शस्थलीं दोन भाग समान होतात.

१३ दोन विवक्षित बिंदूतून जाऊन विवक्षित वर्तुळास छेदणारीं अशीं कितींही वर्तुळे केलीं आणि प्रत्येकाचे छेदन बिंदु सांघून रेखा काढल्या तर त्या एका बिंदूंत मिळतात.

१४ दोन विवक्षित बिंदूतून जाऊन विवक्षित वर्तुळास स्पर्शकरील असें एक वर्तुळ काढावयाचें.

१५ वर्तुळांत ज्या दोन ज्या एकमेकींवर लंब असून परस्परांस छेदितात, त्या ज्यांच्या चारखंडाच्या वर्गांची बेरीज व्यासाच्या वर्गाबरोबर होते.

१६ दोहों अंगांनीं वाढविलेल्या ज्येवर वर्तुळाचे व्यासाच्या टोंकांपासून लंब काढले असतां ज्येचीं

टोंकें चलेंब ह्यांच्यामध्ये जे खंड सांपडतात ते ममान असतात.

१७ कोणत्याही त्रिकोणाचा शिरकोन पाया आणि उंची हीं तीन कळली असतां त्यांच्या योगानें तो त्रिकोण काढावयाचा.

१८ वर्तुळांत ज्येदीं समांतर व्यासामध्ये कोठेंतरी बिंदु घेऊन तेथपर्यंत त्या ज्येचे टोंकापासून दोनरेषा काढल्या असतां त्यांच्या वर्गांची बेरीज व्यासाच्या दोन खंडाच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर होते.

१९ त्रिकोणाचा शिरकोन पाया, आणि दुसऱ्या दोन बाजूंची बेरीज इतकीं समजलीं असतां त्यापासून तो त्रिकोण काढावयाचा.

२० परस्परांस छेदणाऱ्या अशा दोन वर्तुल स्पर्शरेषांचे स्पर्शबिंदु सांधून त्या स्पर्शरेषांच्या छेदनबिंदूपासून वर्तुळांत एक छेदनरेषा केली असतां, तिचे तीन भाग होतात, त्यास छेदनरेषा आणि तिचा मध्यभाग ह्यांचा काढकोनचौकोन तिच्या अंत्यभागांच्या काढकोनचौकोनाबरोबर होतो.

२१ वर्तुळांतील चौकोनाच्या समोरासमोरच्या बाजू वाढविल्या असतां त्या ज्या बिंदूंत मिळतात,

त्यांस सांधणाच्या रेघेचा वर्ग, त्या बिंदूपासून वर्तु -
 लास दोन स्पर्श रेखा केल्या असता त्यांच्या वर्गांच्या
 बेरजेबरोबर होतो.



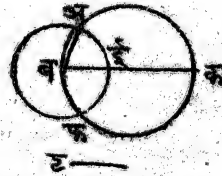
बूकचवथें.

१ सिद्धांत. कृत्य.

वर्तुळांत, त्याच्या व्यासापेक्षां मोठी नसणाऱ्या अशा रेघे एवढी एक रेघ काढावयाची.

अबक एक वर्तुळ आहे, वडु एक रेघ आहे. ती रेघ अबक वर्तुळाच्या व्यासापेक्षां मोठी नाही, त्यास अबक वर्तुळांत डु रेघे एवढी एक व्या काढावयाची.

अबक वर्तुळाचा बक व्यास काढ. बक व्यास डु रेघेबरोबर असल्यास अबक वर्तुळांत डु रेघे एवढी बक रेघ काढली असें होईल,



परंतु बक व्यास डु बरोबर नसल्यास बक व्यास डु रेघेपेक्षां मोठा आहे. (१ बु० ३ या सि० प्र०) डु रेघेबरोबर बक व्यासाचा बई तुकडा कर. ब मध्यधरून बई त्रिजेनें अफई वर्तुळ काढ, आणि ब, अ सांध. अफई वर्तुळाचा ब मध्य आहे. ह्याकरितां ब, अ, बईबरोबर

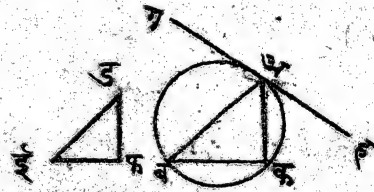
आहे, व ड रेघ ब ई बरोबर आहे, त्या करितां ड ब-
अ बरोबर आहे, म्हणून अबक वर्तुळांत
ड रेघे एवढी अब काढली असे.

२. सिद्धांत. कृत्य.

वर्तुळांत विषक्षित त्रिकोणाचीं समकोण अ-
सा एक संलग्न त्रिकोण काढावयाचा.

अबक एक वर्तुळ आहे, आणि ड ई फ
एक त्रिकोण आहे, त्यास ड ई फ त्रिकोणाचीं
समकोण असा

एक संलग्न त्रि-
कोण अबक
वर्तुळांत काढा



वयाचा. (२ बु० १७ व्या सि० प्र०) अबक वर्तु-
ळास अ त्याळीं ग अ ह स्पर्शरेषा काढ.

(१ बु० २३ व्या सि० प्र०) अ ह रेघेंत अ बिं-
दू जवळ ड ई फ त्रिकोणाच्या ई कोना बरोबर

+ लागून राहणारा.

ह अ क कोन कर, तसेंच अ ग रेषेंत अ बिंदू
जवळ फ कोनाबरोबर ग अ ब कोन कर. आणि
ब, क सांध. ग अ ह रेष अ ब क वर्तुळास अ
स्थळीं स्पर्श करिते, आणि अ क रेष अ स्पर्श
स्थळापासून काढली आहे, ह्यास्तव (३ बु० ३२ व्या
सि० प्र०) ह अ क कोन अ ब क युक्तमखंडां-
टांतील ब कोनाबरोबर आहे, तसेंच ग अ ब
कोन क कोनाबरोबर आहे, ह्या करितां अ ब क
त्रिकोणाचे ब आणि क हे दोन कोन ड ई फ
त्रिकोणाच्या ई आणि फ ह्या दोन कोनां बरोबर आ-
हेत, आणि ह्या कारणास्तव (१ बु० ३२ व्या सि०
प्र०) ब अ क कोन ई ड फ कोनाबरोबर आ-
हे, म्हणून अ ब क त्रिकोण ड ई फ त्रिकोणाशीं
समकोण आहे, तेव्हां अ ब क वर्तुळांत ड ई -
फ त्रिकोणाशीं समकोण असा अ ब क संलग्न
त्रिकोण काढला असे.

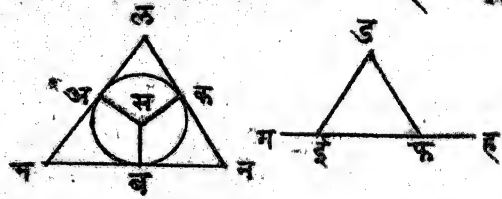
३ सिद्धांत. कृत्य.

वर्तुळाभोंवती विवक्षित त्रिकोणाशीं सम-
कोण असा एक संलग्न त्रिकोण काढावयाचा.

अबक एक वर्तुळ आहे. आणि डुईफ विवक्षित त्रिकोण आहे, त्यास अबक वर्तुळा भोंवती डुईफ त्रिकोणाशी समकोण असा एक संलग्न त्रिकोण काढावयाचा.

ईफ बाजू दोहीं अंगांस ग आणि ह बिंदू पर्यंत वाढीव.

अबक वर्तुळाचा समध्य बिंदु काढ, आणि



त्यापासून सब एक रेषा काढ. (१ बु० २३ व्या सि० प्र०) बस रघेंत स बिंदूजवळ डफ ह कोना एवढा बसक कोन कर, तसेंच डई ग कोनाबरोबर बस अ कोन कर. (२ बु० १० व्या सि० प्र०) अ, ब आणि क ह्या तीन बिंदूंतून ल म, म न आणि न ल अशा तीन स्पर्शरेषा अनुक्रमें काढ. ल म, म न आणि न ल ह्या रेषा अबक वर्तुळास अनुक्रमें अ, ब आणि क ह्या बिंदुस्थानी स्पर्श करितात, आणि अ, ब आणि क ह्या बिंदूंतून स मध्यबिंदू पर्यंत अ-स, ब-स आणि क-स रेषा काढल्या आहेत, त्यास

तीन बिंदूजवळील कोन काटकोन आहेत. अम-
 ब स ह्या चतुष्कोनाच्या चारकोनांची बेरीज चार
 काटकोनांबरोबर आहे, व म अस आणि स-
 ब म हे दोन कोन काटकोन आहेत, ह्यास्तव बा-
 कीचे अमब आणि बस अ ह्या दोन कोनांची
 बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे. (१ बु. १३
 व्या सि. प्र.) डुईग आणि डुईफ ह्या दोन
 कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, ह्यास्त-
 व अमब आणि बस अ हे दोन कोन डुईग
 आणि डुईफ ह्या दोन कोनांबरोबर आहेत, परंतु
 बस अ कोन डुईग कोनाबरोबर आहे,
 ह्यास्तव अमब कोन डुईफ कोनाबरोबर
 आहे, हे स्पष्ट आहे. ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं
 कनब कोन डुफई कोनाबरोबर आहे. ल-
 मन त्रिकोणाचे म आणि न हे दोन कोन डु-
 ईफ त्रिकोणाच्या ई आणि फ ह्या दोन कोनां
 बरोबर आहेत, हे सिद्ध झाले, ह्याकरितां (१ बु.
 ३२ व्या सि. प्र.) लमन त्रिकोणाचा नि-
 सरा कोन ल, डुईफ त्रिकोणाच्या ड कोना-



बरोबर आहे, ह्यास्तव लमन त्रिकोण ड ई फ त्रिकोणाची समकोण आहे, आणि तो अबक वर्तुळाच्या भोंवती संलग्न काढला असे.

४ सिद्धांत. कृत्य.

त्रिकोणांत संलग्न वर्तुळ काढावयाचें.

अबक एक त्रिकोण आहे, त्यांत संलग्न वर्तुळ काढावयाचें.

बड रेघेनें अबक कोनाचे दोन समान भाग कर, व कड रेघेनें

अकब कोनाचे दोन समान भाग कर, आणि

बड आणि कड ह्या दोन रेखांच्या ड छेदन



बिंदूपासून ड फ, ड ई आणि ड ग ह्या तीन रेखा बक, अब आणि अक ह्या तीन बाजूंवर अनुक्रमें लंब काढ. ई बड आणि फ बड ह्या दोन त्रिकोणांत ई बड कोन फ बड कोना बरोबर आहे, कारण बड रेघेनें अबक कोनाचे दोन समान भाग केले आहेत. ब ई ड कोन ब फ ड

आहेत, आणि बडु बाजू दोन्ही त्रिकोणांस साधार-
 ण आहे, ह्या करितां (१ बु० १६ व्या सि० प्र०) ई-
 बडु त्रिकोणाची डई बाजू फ बडु त्रिकोणा-
 च्या ड फ बाजू बरोबर आहे; ह्या प्रमाणेच ड ग
 बाजू ड फ बाजू बरोबर आहे, हे सिद्ध होतें, ह्या-
 करितां डई, ड फ आणि ड ग ह्या तीन रेषा
 परस्पर बरोबर आहेत. ड मध्य कल्पून ह्या तीन
 रेषांपैकी कोणत्याही एका रेषेनें वर्तुळ काढलें अ-
 सतां, तें बाकीच्या दोन रेषांच्या दोबटांतून जाईल, व
 अब, बक आणि कअ ह्या तीन रेषांस अनु-
 क्रमेण ई, फ आणि ग ह्या तीन बिंदूंत स्पर्श क-
 रील, कारण ई, फ आणि ग ह्या तीन बिंदूज-
 वळील कोन काटकोन आहेत, आणि (२ बु० १६
 व्या सि० प्र०) बिज्येच्या टोंकावर जी रेषा लंब अ-
 सते, ती वर्तुळास स्पर्श करिते, म्हणून अब, बक
 आणि अक ह्या रेषा ई फ ग वर्तुळास स्पर्श करि-
 तात, आणि ई फ ग वर्तुळ अबक त्रिकोणां-
 न संलग्न काढलें असे.



त्रिकोणा सभोंवती संलग्न वर्तुळ काढावयाचें.

अबक एक त्रिकोण आहे, त्यास त्या सभों-
वती वर्तुळ काढावयाचें.

(१ बु० १० व्या सि० प्र०) अब रेघेचे दु
स्थळीं दोन समान भाग कर, तसेंच अक रेघेचे ई
स्थळीं दोन समान भाग कर, आणि (१ बु० ११ व्या
सि० प्र०) दु आणि ई त्या दोन बिंदूंतून अ -



ब आणि अक त्या दोन बाजूंवर अनुक्रमें डफ
आणि ईफ रेखा लंब काढ. दुफ आणि ईफ
लंब वाढविले असतां मिळतील, मिळणार नाहीत,
असें मानल्यास ते समांतर होऊं लागतील, आणि ते
समांतर झाले म्हणजे, ते ज्या रेखांवर लंब आहेत त्या
अब आणि अक रेखाही समांतर होऊं लागती-
ल, पण त्या रेखा अ स्थळीं मिळतात, त्या करितां

तील, ते फ बिंदूत मिळतात असं मानू. अ, फ
 सांध, आणि फ बिंदु ब क रेघेंत नसल्यास ब,
 फ आणि क, फ सांध. अडफ आणि बडफ
 ह्या दोन त्रिकोणांत अड बाजू बड बाजूबरो-
 बर आहे, व डफ बाजू दोन्ही त्रिकोणांस साधार-
 ण आहे, आणि ड बिंदू जवळील कोन काट-
 कोन आहेत, ह्या करितां (१ बु० ४ थ्या सि० प्र०)
 अफ बाजू बफ बाजू बरोबर आहे, आणि ह्या
 रीतीनेंच सिद्ध होते, कीं कफ बाजू अफ बा-
 जू बरोबर आहे, ह्या करितां अफ, बफ आणि
 कफ ह्या तीन रेखा बरस्पर बरोबर आहेत; फ
 मध्य बिंदु धरून ह्या तीन रेखांपैकीं कोणत्याही एका
 रेघेनें वर्तुळ काढलें असतां, तें दुसऱ्या दोन रेखां -
 च्या दोवटांतून जाईल, आणि अबक त्रिको-
 णा सभोंवती संलग्न होईल.

कु० ही गोष्ट उघड आहे, कीं त्रिकोणाच्या स-
 भोंवतालच्या संलग्न वर्तुळाच्या मध्यत्रिकोणांत प-
 डला असतां त्याचे तीन्ही कोन लघुकोन असतात,
 कारण प्रत्येक कोन अर्धवर्तुलापेक्षा मोठ्या रेंव-



जूंत असल्यास त्या बाजू समोरील कोन काटको-
 न असतो, कारण तो कोन अर्धवर्तुळांत पडतो,
 वर्तुळाचा मध्यत्रिकोणाच्या बाहेर पडला असता,
 ज्या बाजूच्या बाहेरील अंगास तो मध्य असतो,
 त्या बाजू समोरील कोन विशाल असतो, कारण
 तो कोन अर्धवर्तुलापेक्षां लहान खंडांत असतो,
 ह्या करितां लघुकोणत्रिकोण असल्यास सभोवताल -
 च्या वर्तुळाचा मध्यबिंदु त्रिकोणांत पडेल, काट-
 कोन त्रिकोण असल्यास मध्यबिंदु कर्णरेषेंत पडे-
 ल, आणि विशालकोण त्रिकोण असल्यास, मध्य-
 बिंदु विशालकोना समोरच्या बाजूच्या पलीकडील
 अंगास पडेल.

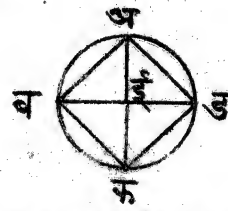
६ सिद्धांत. कृत्य.

वर्तुळांत संलग्न चौरस काढावयाचें.

अबकडु एक वर्तुळ आहे, त्यास त्या-
 चे आंत संलग्न चौरस काढावयाचें.

अक आणि बडु हे दोन्ही व्यास परस्परां
 चर लंब होतील असे काढ, आणि अब बक्र

णि अ ई उ ह्या दोन त्रि-
कोणांत ई ब बाजू ई उ
बाजू बरोबर आहे, कारण
ई मध्य आहे, ई अ



बाजू दोहों त्रिकोणांस साधारण आहे, ब अ ई-
ब आणि अ ई उ हे दोन्ही कोन काटकोन आहे-
त, ह्या करितां (१ बु० ४ व्या सि० प्र०) अब बाजू अ-
उ बाजू बरोबर आहे, ह्या रीतीनें च सिद्ध होते, कीं ब-
क बाजू अब बाजू बरोबर आहे, ब क उ बाजू अ उ बा-
जू बरोबर आहे, ह्या करितां अब क उ चतुष्कोणाकृति
समभुज चौकोन आहे. ब उ व्यास आहे, ह्या-
करितां ब अ उ अर्धवर्तुळ आहे, म्हणून (३
बु० ३१ व्या सि० प्र०) ब अ उ कोन काटको-
न आहे; अब क, ब क उ आणि क उ अ
हे सर्व कोन अर्धवर्तुळांत आहेत, ह्या करितां
तेही काटकोन आहेत, ह्या करितां अब क उ
चौकोनाचे चारही कोन काटकोन आहेत, आ-
णि पूर्वी सिद्ध केले आहे, कीं अब क उ चौ-
कोन समभुज आहे, ह्यास्तव अब क उ

चौरस आहे, व ते अब कड ह्या वर्तुळांत सं-
लग्न काढले असे.

७ सिद्धांत. कृत्य.

वर्तुळा सभोंवती संलग्न चौरस काढाव-
याचे.

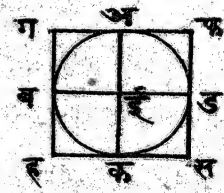
अब कड एक वर्तुळ आहे, त्यास त्याचे
सभोंवती संलग्न वर्तुळ काढावयाचे.

अक आणि बड हे दोन व्यास असे
काढ, कीं ते परस्परां-

वर लंब होतील. (३ बु०

१७ व्या सि० प्र०) अ,

ब, क आणि ड ह्या



चार बिंदूंतून अनुक्रमें फ ग, ग ह, ह स आ-

णि स फ अब कड वर्तुळास स्पर्शरेषा का-

ढ. फ ग रेषा अब कड वर्तुळास अ स्थळीं

स्पर्श करिते, आणि ई मध्यांतून ई अ रेषा अ

स्पर्श बिंदूपर्यंत केली आहे, ह्या करिता (३ बु० १८

व्या सि० प्र०) अ बिंदूजवळचे कोन काढकोन

आहेत, ह्याप्रमाणेंच ब, क आणि ड ह्या सर्व

कोन काटकोन आहे, आणि ग ब ड् कोन ही काट-
 कोन आहे, ह्याकरितां (१ बु० २८ व्या सि० प्र०) ग-
 ह रेघ अकशीं समांतर आहे, आणि ह्याप्रमा-
 णेच फ स रेघ अकशीं समांतर आहे, व ह्या
 प्रमाणेच सिद्ध होतें, कीं ग फ आणि ह स ह्या
 दोन रेघांपैकीं प्रत्येक रेघ ब ड् शीं समांतर आ-
 हे. आतां ही गोष्ट स्पष्ट आहे, कीं ग स, ग क, अ-
 स, फ ब आणि ब स ह्या सर्व चतुर्कोणाकृति स-
 मांतरभुज आहेत, आणि ह्याकरितां (१ बु० ३४ व्या सि० प्र०)
 ग फ रेघ ह स रेघेबरोबर आहे, व ग ह रेघ फ स रेघे
 बरोबर आहे. अक रेघ ग ह आणि फ स ह्या दोन रेघांपैकीं
 प्रत्येकीशीं बरोबर आहे, तसेंच ब ड् रेघ ग फ
 आणि ह स ह्या दोन रेघांपैकीं प्रत्येकीशीं बरोबर
 आहे, पण अक रेघ ब ड् बरोबर आहे, ह्या-
 करितां ग फ, ह स, ग ह आणि फ स ह्या चार
 रही रेघा परस्परबरोबर आहेत, म्हणून ग ह स-
 फ चौकोन समभुज आहे. अ ग ब ड् समांतर
 भुज चौकोन आहे, आणि अ ड् ब कोन काटकोन
 आहे, ह्याकरितां अ ड् ब समोरीक जो कोन अ-

ग व तोही काटकोन आहे, व ह्या रीतीनेच सिद्ध हो-
 तें, कीं ह, स आणि फ हे कोन काटकोन आहेत,
 ह्या करितां ग ह स फ चौकोन काटकोन चौकोन
 आहे; पूर्वी सिद्ध केलें आहे, कीं ग ह स फ चौ-
 कोन समभुज आहे, ह्या करितां ग ह स फ चौ-
 कोन चौरस आहे, व तें अबकड वतुळासभों
 वतीं संलग्न काढलें असे.

८ सिद्धान्तकृत्य.

चौरसामध्ये संलग्न वतुळ काढावयाचें.

अबकड एकचौरस आहे, त्यांत संलग्न

वतुळ काढावयाचें. (१)

बु० १० व्या सि० प्र०)

अड आणि अब

ह्या दोन बाजूंचे ई आ -

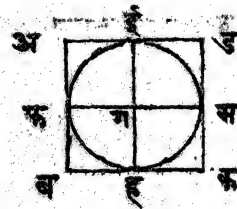
णि फ ह्या स्थळीं अनुक्रमे-

में दोन दोन समान भाग कर, आणि (१ बु० ३१ व्या

सि० प्र०) ई बिंदूतून ई ह रेणू अबशीं किंवा

ड कशीं समांतर काढ, व फ बिंदूतून फ स रेणू

अडशीं किंवा ब कशीं समांतर काढ, तेदां अ-



स, सब, अह, उह, अग, गक, बग,
 आणि गडु ह्या सर्व आकृति समांतर भुजचौकोन
 आहेत, आणि ह्या करितां (१ बु० ३४ व्या सि० प्र०)
 ह्या समांतर भुजचौकोनांच्या समोरासमोरच्या बाजू
 परस्पर बरोबर आहेत, अडु आणि अब ह्या बा-
 जू परस्पर बरोबर आहेत, आणि त्यांचे ई आणि
 फ ह्या स्थळीं दोन दोन समान भाग केले आहेत, ह्या-
 करितां अ ई आणि अ फ परस्पर बरोबर आ-
 हेत, आणि ह्या करितां त्यांच्या बरोबरीच्या ज्या बाजू
 फ ग आणि ई ग ह्याही परस्पर बरोबर आहेत. ह्याप्रमाणेच
 सिद्ध होते, कीं ग स बाजू ई ग बाजू बरोबर आहे, व ग ह
 बाजू फ ग बाजू बरोबर आहे, ह्या करितां ग ई, ग फ, ग ह,
 आणि ग स ह्या सर्व रेषा परस्पर बरोबर आहेत, म्हणून ग
 मध्य धरून ह्या चार रेषांपैकी कोणत्या तरी एका रेषेने व-
 तुंभ काढले असतां, ते बाकीच्या तीन रेषांच्या शेव-
 टांतून जाईल. (१ बु० २९ व्या सि० प्र०) फ ई,
 स आणि ह ह्या बिंदूजवळचे सर्व कोन काढकोन
 आहेत, ह्यास्तव अब, अड, उक, आणि
 कब ह्या रेषा अनुक्रमेण ग फ, ग ई, ग स
 आणि ग ह ह्या रेषांवर ठेंब आहेत, पण ग फ,

गई इरेषा फई सह वर्तुळाच्या त्रिज्या आहेत,
आणि त्रिज्यांच्या टोंकांवर ज्या रेषा लंब असनात,
त्या (३ बु० १६ व्या सि० प्र०) वर्तुळास स्पर्शक-
रितात, ह्या करिता फई सह वर्तुळास अब-
कड चौरसाच्या अब, अड, डक आणि
क ब ह्या बाजू स्पर्शकरितात, तेव्हा अबक-
ड चौरसांत फई सह वर्तुळ संलग्न निघालें,
हें सिद्ध.

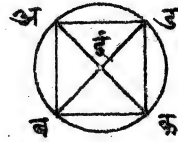
९. सिद्धांत. कृत्य.

चौरसा सभोंवती संलग्न वर्तुळ काढावयाचें.
अबकड एक चौरस आहे, त्या सभोंव-
ती संलग्न वर्तुळ काढावयाचें.

अ, क आणि ब, ड सांध. अक आणि
बड ह्या कर्ण रेषा परस्परान्स ई स्थळीं छेदितात,
अबड आणि अडक ह्या दोन त्रिकोणांत अ
ब बाजू कड बाजूबरोबर आहे, अड बाजू
दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे, व ब अड अं-
तरकोन अडक अंतरकोनाबरोबर आहे ह्याक-
रितां (१ बु० ४ व्या सि० प्र०) बड कर्ण रेषा

अक कर्णरेषेबरोबर आहे, व (२ बु० ब सि०

कु० प्र०) समांतरभुज
चौकोनाच्या कर्णरेषा पर-
स्परांचे दोन दोन समान
भाग करितात, ह्याकरिता



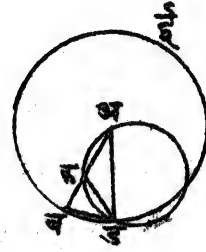
ई अ, ई क, ई इ आणि ई ब ह्या सर्वरेषा पर-
स्परबरोबर आहेत. ई मध्य कल्पून ई अ, ई-
क, ई इ आणि ई ब ह्या रेषांपैकी कोणत्या-
ही रेषेनें वर्तुळ काढलें असतां, तें बाकीच्या ती-
न रेषांच्या शोबटांतून जाईल, तेव्हां अ ब क-
इ चौरसा सभोंवती संलग्न वर्तुळ निघालें हें उ-
घड आहे.

१० सिद्धांत. कृत्य.

ज्याच्या पायाकडील प्रत्येक कोन शिरकोना-
च्या दुप्पट होईल असा एक समद्विभुज त्रिकोण
काढावयाचा.

अ ब एक रेषेचे, आणि (२ बु० ११ व्या
सि० प्र०) तिला क स्थळीं अशी वेदकी अ-
ब × ब क काढकोन चौकोन अ क च्या वर्गा

बरोबर होईल. अ मध्यबिंदुधरून अ व बि-
 ज्येनें बर्डु वर्तुळ
 काढ, आणि त्या वर्तुळांत
 अ क रेषे एवढी बडु
 ज्या (४ बु० १ व्या सि०
 प्र०) काढ. अ, ड आ-
 णि क, ड सांध, आणि (४ बु० ५ व्या सि० प्र०) अ-
 कड त्रिकोणासभोंवती अ कड संलग्न वर्तुळ
 काढ.



अव. बक काढकोनचौकोन अक व्यावर्गाबरो-
 बर आहे, आणि अक, बडु बरोबर आहे, याकरितां अ-
 व. बक काढकोनचौकोन बडु वर्गाबरोबर आहे; अक-
 ड वर्तुळाबाहेरील व बिंदूपासून व अ आणि बडु अ-
 शा दोन रेषा काढल्या आहेत, त्यांपैकीं व अ रेषा
 अकड वर्तुळास क स्थळीं छेदिते, आणि बडु
 रेषा त्यास ड स्थळीं मिळते. व अ छेदनरेषा आ-
 णि बाहेरील तिचा भाग व क ह्यांचा काढकोनचौ-
 कोन वर्तुळास मिळणाऱ्या बडु रेषेच्या वर्गाबरोबर
 आहे, याकरितां (१ बु० १७ व्या सि० प्र०) अक
 ड वर्तुळास बडु रेषा स्थळीं स्पर्श करिते. बडु

स्पर्शरेषा आहे, आणि दु स्पर्शबिंदूपासून दु क
 ज्या काढली आहे, ह्या करितां (१ बु० ३२ व्या सि०
 प्र०) बडक कोन दु अक व्युक्रमखंडांतील
 दु अक कोनाबरोबर आहे, ह्या दोन्ही कोनांत क-
 दु अ कोन मिळीव, म्हणजे सगळा बड अ
 कोन कड अ आणि दु अक ह्या दोन कोनां-
 च्या बेरजे बरोबर होईल. अकड त्रिकोणाचा
 बाहेरील बकड कोन (१ बु० ३२ व्या सि० प्र०)
 कड अ आणि दु अक ह्या दोन कोनांच्या बेर-
 जे बरोबर आहे, म्हणून बड अ कोन बकड
 कोनाबरोबर आहे. अब आणि अड ह्या दो-
 णी रेषा त्रिज्या आहेत, ह्या करितां त्या परस्परबरो-
 बर आहेत, म्हणून (१ बु० ५ व्या सि० प्र०) अ-
 बड कोन अडब कोनाबरोबर आहे, म्हणून ब-
 कड कोन कबड कोनाबरोबर आहे, म्हणून
 (१ बु० ६ व्या सि० प्र०) बड बाजू दु क बाजू
 बरोबर आहे. बड रेषा अक रेषेबरोबर केली
 आहे, ह्या करितां दु क अक बरोबर आहे, म्ह-
 णून (१ बु० ५ व्या सि० व०) कअड कोन
 अडक कोनाबरोबर आहे. कअड आणि

अडक ह्या दोन कोनांची बेरीज कअड को-
नाच्या दुप्पट आहे, असें म्हणण्यास चिंता नाही.
कअड आणि कड अ ह्या दोन कोनांची बेरी-
ज बड अ कोनाबरोबर आहे, ह्या करितां बड-
अ कोन कअड कोनाच्या दुप्पट आहे. अबड-
कोन बड अ कोनाबरोबर आहे, ह्या करितां ब -
अड शिरकोनाच्या दुप्पट अबड समद्विभुज
त्रिकोणाच्या पाया कडील प्रत्येक कोन आहे, हे सिद्ध.

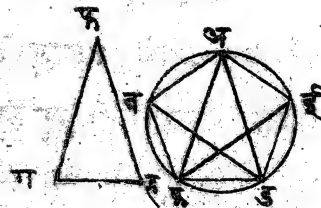
११ सिद्धांत. कृत्य.

वर्तुळांत संलग्न समभुज समकोण पंचको-
ण काढावयाचे.

अबकडई एक वर्तुळ आहे, त्यामध्ये
संलग्न समभुज समकोण पंचकोण काढावयाचे.

(४ बु० १० व्या सि० प्र०) फगह एक
समद्विभुज त्रिकोण

काढ, असा की त्या-
च्या पायाकडील प्र-
त्येक कोन त्याच्या



+ पंचमणजे पंच.

शिरकोनाच्या दुप्पट होईल. (४ बु० २ व्या सि० प्र०) अबकडई वर्तुळांत फगह त्रिकोणा-
 शीं समकोण असा एक अकड त्रिकोण कर, तो
 असा, कीं अकड त्रिकोणाचा क अड शिरको-
 न ग फ ह त्रिकोणाच्या फ शिरकोनावरोबर
 होईल, व अकड आणि अडक पायाकडील
 कोन ग आणि ह पायाकडील कोनांवरोबर अनु-
 क्रमें होतील. तेव्हां अकड आणि अडक ह्या
 दोन कोनांपैकीं प्रत्येक कोन क अड कोनाच्या
 दुप्पट आहे; (१ बु० ९ व्या सि० प्र०) अकड
 आणि अडक ह्या दोन कोनांचे कई आणि
 डब ह्या दोन रेषांनीं अनुक्रमें दोन दोन समान
 भाग कर, आणि अ, ब अ, ई ई, ड आणि
 ब, क सांध.

अकड आणि अडक ह्या दोन कोनां
 पैकीं प्रत्येक कोन क अड कोनाच्या दुप्पट आ-
 हे, व त्यांचे कई आणि डब ह्या दोन रेषांनीं दो-
 न दोन समान भाग केले आहेत, ह्याकरितां अक-
 ई, ईकड, कडब, बडअ, आणि क-
 अड हे सर्व कोन परस्पर बरोबर आहेत. स-

मानकोन समान कोंसावर असतात, असें ३ बुका-
 च्या २६ सिद्धांतांत सिद्ध केले आहे, ह्याकरितां
 अब, बक, कड, डई आणि ईअ हे
 सर्व कोंस परस्परबरोबर आहेत. समान कोंसा-
 च्या ज्या समान असतात, असें १ बु० २९ व्या सि-
 द्धांतांत सिद्ध केले आहे, म्हणून अब, बक,
 कड, डई आणि ईअ ह्या ज्या सर्व परस्प-
 रबरोबर आहेत, ह्यासब अबकडई आकृ-
 ति समभुज पंचकोण आहे. अब कोंस डई
 कोंसाबरोबर आहे, दोन्ही कोंसांत बकड
 कोंस मिळीव, तेव्हां अबकड कोंस ईडक-
 ब कोंसाबरोबर होईल. अबकड कोंसावरी-
 ल अईड कोन आणि ईडकब कोंसावरी-
 ल बअई कोन हे (३ बु० २७ व्या सि० प्र०)
 परस्परबरोबर आहेत. ह्याप्रमाणेंच अबक,
 बकड आणि कडई हे कोन बअई
 किंवा अईड कोनाबरोबर आहेत, असें
 सिद्ध होते, म्हणून अबकडई पंचकोणा
 कृति समकोण आहे, पूर्वी ती आकृति समभुज
 आहे असें सिद्ध केले आहे, ह्याकरितां अब-

णि ते अ ब क ड ई वर्तुळांत काढले असे.

१२ सिद्धांत. कृत्य.

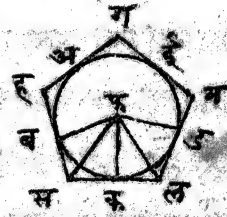
वर्तुळा सभोंवती संलग्न समकोण पंचकोण काढावयाचे.

अ ब क ड ई एक वर्तुळ आहे, त्यासभोंवती संलग्न समभुज समकोण पंचकोण काढावयाचे.

अ ब क ड ई वर्तुळांत मागील सिद्धांताप्रमाणे काढलेल्या सम-

भुज समकोण पंचकोणाकृतीचे कोनांचीं दोकें

अ, ब, क, ड, ई बिंदु आहेत, असें मानूं. तेव्हां



(४ बु० ११ व्या सि० प्र०) अ, ब, क, ड, ड ई आणि ई अ हे सर्व कोंस परस्पर बरोबर आहेत. (३ बु० ११ व्या सि० प्र०) अ, ब, क, ड, ई ह्या बिंदूंतून अनुक्रमेण ग, ह, स, ल, लम आणि म ग स्पर्शरेषा काढ. वर्तुळाचा

फ मध्यबिंदु काट, आणि फ, ब फ, स फ, क
 फ, ल आणि फ, ड सांध. सल रेघ अबक-
 ड ई वर्तुळास क स्थळीं स्पर्श करिते, आणि फ
 मध्यबिंदूपासून क स्पर्शस्थलापर्यंत फ क रेघ
 काढिली आहे, ह्या करितां (३ बु० १० व्या सि० प्र०)
 फ क रेघ सल वर लंब आहे, ह्या प्रमाणेंच सिद्ध
 होतें, कीं फ ब आणि फ ड ह्या रेखा ह स आ-
 णि ल म ह्या स्पर्शरेषांवर अनुक्रमें लंब आहेत.
 फ क स कोन काटकोन आहे, ह्या करितां (१ बु०
 ४७ व्या सि० प्र०) फ स, फ क आणि स क
 ह्यांचे बेरजे बरोबर आहे, ब कोन काटकोन आ-
 हे, ह्या करितां फ स, फ ब आणि ब स ह्यांचे
 बेरजे बरोबर आहे, म्हणून फ क आणि स क
 हे फ ब आणि ब स ह्यां बरोबर आहेत. फ क,
 फ ब बरोबर आहे, कारण फ क आणि फ ब ह्या
 रेखा त्रिज्या आहेत, तेव्हां स क, ब स बरोबर
 आहे, म्हणून स क ब स बरोबर आहे. ब फ-
 स आणि क फ स ह्या दोन त्रिकोणांत फ ब
 बाजू फ क बाजू बरोबर आहे, ब स, स क
 बरोबर आहे, आणि फ स रेघ दोन्ही त्रिकोणांस

साधारण आहे, ह्या करितां (१ बु० ८ व्या सि० प्र०)
 ब फ स कोन क फ स कोनाबरोबर आहे, व
 ब स फ कोन क स फ कोनाबरोबर आहे, आ-
 णि ह्या करितां ब फ क कोन क फ स कोनाच्या
 दुप्पट आहे, व ब स क कोन फ स क कोनाच्या
 दुप्पट आहे, हे स्पष्टच आहे. ह्या प्रमाणेंच सिद्ध हो-
 तें, कीं क फ ड कोन क फ ल कोनाच्या दुप्पट
 आहे, व क ल ड कोन क ल फ कोनाच्या दुप्पट
 आहे. ब क कौंस क ड कौंसाबरोबर आहे, ह्या
 करितां (३ बु० २७ व्या सि० प्र०) ब फ क कोन
 क फ ड कोनाबरोबर आहे. ब फ क कोन स -
 फ क कोनाच्या दुप्पट आहे, व क फ ड कोन
 क फ ल कोनाच्या दुप्पट आहे, ह्या करितां स -
 फ क कोन क फ ल कोनाबरोबर आहे. फ -
 क स आणि फ क ल ह्या दोन त्रिकोणांत स -
 फ क कोन ल फ क कोनाबरोबर आहे. फ -
 क स काटकोन फ क ल काटकोनाबरोबर आहे,
 आणि फ क बाजू दोन्ही त्रिकोणांस साधारण
 आहे, ह्या करितां (१ बु० २६ व्या सि० प्र०) फ -
 स बाजू फ ल बाजूबरोबर आहे, फ स क

कोन फलक कोना बरोबर आहे, आणि सक
 बाजू लक बाजू बरोबर आहे. सक, लक बरो-
 बर आहे, ह्या करितां सल, सक च्या दुप्पट आहे.
 सल सक च्या दुप्पट आहे, हें ज्यारीतीनें सिद्ध
 झालें त्यारीतीनेंच हस बस च्या दुप्पट आहे,
 हें सिद्ध होतें. बस, सक बरोबर आहे, असें
 पूर्वी सिद्ध केले आहे, व हस बस चे दुप्पट आ-
 हे, व सल, सक चे दुप्पट आहे, ह्या करितां ह-
 स सल बरोबर आहे, ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होई-
 ल, कीं हग, गम, आणि मल ह्या बाजू प्रत्ये-
 क सल बरोबर आहेत. ह्या करितां हसल -
 मग पंचकोण समभुज आहे. फसक कोन
 फलक कोना बरोबर आहे, आणि बसक
 कोन फसक कोना च्या दुप्पट आहे, व डलक
 कोन फलक कोना च्या दुप्पट आहे, ह्या करितां
 बसक कोन डलक कोना बरोबर आहे, ग-
 हस, मग ह आणि लमग हे कोन प्रत्येक
 हसल कोना बरोबर आहेत, हें सिद्ध वरल्या
 प्रमाणेंच होतें, ह्या करितां हसल मग पंचको-
 ण समकोण आहे, ह्यास्तव अबक डडुर्गु-

ळा सभोंवती संलग्न समभुज समकोण हसल..
मग पंचकोण काढलें असे.

१३ सिद्धांत.कृत्य.

समभुज समकोण पंचकोणांत संलग्न
वर्तुळ काढावयाचें.

अब कडई एक समभुज समकोण
पंचकोण आहे, त्याचे आंत संलग्न वर्तुळ काढा-
वयाचें.

(१ बु० ९ व्या सि० प्र०) कफ रेघेनें ब-
कड कोनाचे दोन समान

भाग कर, व डफ रेघेनें

कडई कोनाचे दोन स-

मान भाग कर, कफ आ-

णि डफ ह्या दोन रेखा

फ बिंदूंत मिळतात, त्याचासून फब, फअ

आणि फई रेखा काढ. बकफ आणि कड-

फ ह्या दोन त्रिकोणांत बक बाजू कड बाजू

बरोबर आहे. कफ बाजू दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आ-

हे, आणि बकफ अंतरकोन डकफ अंतरकोन



बरोबर आहे, ह्या करितां (१ बु० ४ व्या सि० प्र०)
 ब फ वाजू ड फ वाजू बरोबर आहे, व क
 ब फ कोन क ड फ कोनाबरोबर आहे. क ड -
 ई कोन क ब अ कोनाबरोबर आहे, व क ड -
 फ कोन क ब फ कोनाबरोबर आहे, पण क -
 ड ई कोन क ड फ कोनाच्या दुपट आहे, ह्या
 करितां क ब अ कोन क ब फ कोनाच्या दुपट
 आहे, म्हणजे क ब फ कोन फ ब अ कोनाबरो-
 बर आहे, म्हणून क ब अ कोनाचे ब फ रेख दोन
 समान भाग करिते, असें म्हणण्यास चिंता नाही. ह्या
 प्रमाणेंच सिद्ध होईल, कीं अ फ रेख व अ ई
 कोनाचे दोन समान भाग करिते, व ई फ रेख अ ई ड
 कोनाचे दोन समान भाग करिते. (१ बु० १२ व्या
 सि० प्र०) फ स, फ ल, फ म, फ ग आणि
 फ ह ह्या रेखा क ड, ड ई, ई अ, अ ब, आ-
 णि ब क ह्या रेखांवर अनुक्रमें लंब काढ. फ ह -
 क आणि फ स क ह्या दोन त्रिकोणांत फ क -
 ह कोन फ क स कोनाबरोबर आहे, फ ह -
 क काढकोन फ स क काढकोनाबरोबर आहे,
 आणि फ ह क आणि फ स क हे जे समान
 कोन ह्यांच्या समोरची क फ वाजू दोन्ही त्रिको-

णांस साधारण आहे, ह्या करितां (१ बु० २६ व्या
 सि० प्र०) फ ह लंब फ स लंबाबरोबर आहे,
 आणि ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होईल, कीं फ ग, फ म
 आणि फ ल ह्या लंबांपैकीं प्रत्येक लंब फ स लं-
 बाबरोबर आहे, ह्या करितां फ ग, फ ह, फ स,
 फ ल आणि फ म हे सर्व लंब परस्पर बरोबर
 आहेत. फ मध्यधरून ह्या पांच लंबांपैकीं कोण-
 त्या तरी एका लंबानें वर्तुळ काढलें असतां, ते बा-
 कीच्या चार लंबांच्या शेवटांतून जाईल, व अ-
 ब, ब क, क ड, ड ई आणि ई अ ह्या सर्व
 रेखांस स्पर्श करील, कारण ग, ह, स, ल आ-
 णि म ह्या बिंदूजबळील सर्व कोन काटकोन आ-
 हेत, आणि त्रिज्येच्या टोंकावर जी रेख लंब असते,
 ती वर्तुळास स्पर्श करिते, म्हणून अब, ब क,
 क ड, ड ई आणि ई अ ह्या सर्व रेखा वर्तुळास
 स्पर्श करितात, ह्या करितां अब क ड ई समभु-
 ज समकोण पंचकोणांत ग ह स ल म वर्तुळ
 काढलें असे.

१४ सिद्धांत. कृत्य.

समभुज समकोण पंचकोणा सभोंवती सं-
लग्न वर्तुळ काढावयाचे.

अ ब क ड ई एक समभुज समकोण
पंचकोण आहे, त्या सभोंवती संलग्न वर्तुळ काढा-
वयाचे.

(१ बु० ९ व्या सि० प्र०) क फ रेघेनें ब -
क ड कोनाचे दोन समान भाग कर, च ड फ रेघे-
नें क ड ई कोनाचे दो-
न समान भाग कर, आ-
णि क फ आणि ड फ
ह्या दोन रेखा फ स्थळी
मिळतात, त्यास फ बिं



दूपासून ब, अ आणि ई बिंदूपर्यंत फ ब, फ -
अ आणि फ ई रेखा काढ. मागील सिद्धांतांत सि-
द्ध केले आहे त्या प्रमाणेंच सिद्ध होईल, कीं क ब -
अ ब अ ई आणि अ ई ड ह्या कोनांचे अ-
नुक्रमें ब फ अ फ आणि ई फ ह्या रेखा दोन
दोन समान भाग करितात. ब क ड कोन क ड ई

कोनाबरोबर आहे, आणि फकड कोन बकड को-
 नाचें अर्ध आहे, व फडक कोन कडई कोनाचें
 अर्ध आहे, ह्याकरितां फकड कोन फडक को-
 नाबरोबर आहे, म्हणून (१ बु० ६ व्या सि० प्र०)
 कफ बाजूडफ बाजूबरोबर आहे, आणि ह्या
 प्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं बफ, अफ आणि ई -
 फ ह्या रेखा प्रत्येक डफ बाजूबरोबर आहेत. फ
 मध्यकल्पून ह्या पांच रेखां पैकीं एका रेखेनें वर्तुळ
 काढलें असतां, तें बाकीच्या रेखांच्या दोबटांतून
 जाईल, त्यास अबकडई समभुज समकोण
 पंच कोणा सभोंवती संलग्न वर्तुळ काढलें असे.

१५ सिद्धांत-कृत्य.

वर्तुळांत समभुज समकोण षट्कोण का-
 दावयाचें.

अबकडईफ एक वर्तुळ आहे, त्यांत
 समभुज समकोण षट्कोण काढावयाचें.

अबकडईफ वर्तुळाचा ग मध्यकाद,

+ षट् म्हणजे साहा.

आणि अगड व्यास काढ, ड मध्यधरून डग
त्रिज्येनें ई ग क ह वर्तुळ काढ, ई, ग. आणि
क, ग सांध. ई ग आणि क ग रेघा फ आणि
ब बिंदूपर्यंत वाढीव, आणि अ, ब ब, क क,
ड ड. ई ई, फ आणि फ, अ सांध.

अब कड ई फ वर्तुळाचा ग मध्य आहे,

ह्या करितां ग ई, ग ड
बरोबर आहे, व ग क-
ह ई वर्तुळाचा मध्य ड
आहे, ह्या करितां ड ई
ड ग बरोबर आहे, म्ह-



पून ग ई, ड ई बरोबर आहे, आणि ह्या करितां ग ई ड त्रि-
कोण समभुज आहे. (१ बु० ५ व्या सि० कु० प्र०) ग ई ड
त्रिकोणाचे ग ई ड, ई ड ग आणि ड ग ई हे तीनही कोन
परस्पर बरोबर आहेत. त्रिकोणाचे तीन कोनांनी
बेरीज होन काढ कोनां बरोबर असते, असें १ बु०
३२ व्या सिद्धांतांत सिद्ध केले आहे, म्हणून ई ग ड
कोन साठ अंशांचा आहे, व ह्या त्रिभुजाचे सिद्ध होतें, कीं ड ग-
क कोन साठ अंशांचा आहे. बई रेघेस क ग रेघा ग स्थळीं
मिळते, ह्या करितां (१ बु० १२ व्या सि० प्र०) ई ग क आणि

क ग ब हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां
 बरोबर आहेत, पण ई ग क कोन १२० अंशां-
 चा आहे, ह्या करितां अर्थोत्तर क ग ब कोन ६०
 अंशांचा आहे, म्हणून ई ग ड, ड ग क आ-
 णि क ग ब हे तीन कोन परस्पर बरोबर आहे-
 त. हे, ह्यां समोरील जे कोन ब ग अ, अ ग-
 फ आणि फ ग ई ह्यांशीं (१ बु० १५ व्या सि-
 प्र०) परस्पर बरोबर आहेत, म्हणून ई ग ड,
 ड ग क, क ग ब, ब ग अ, अ ग फ आ-
 णि फ ग ई हे साहाकोन परस्पर बरोबर आ-
 हेत, परंतु समकोन समकौंसांवर असतात असें
 ३ बु० २६ व्या सिद्धांतांत सांगितलें आहे, ह्या क-
 रितां अब, बक, कड, डई, ईफ आ-
 णि फअ हे साहाकौंस परस्पर बरोबर आ-
 हेत. समकौंसांच्या ज्या सम असतात, असें ३
 व्या बुकाच्या २९ व्या सिद्धांतांत आहे, ह्या करि-
 तां अब, बक, कड, डई, ईफ आणि
 फअ ह्या साहाज्या परस्पर बरोबर आहेत,
 म्हणून अबकडईफ षट्कोन समभुज
 आहे. अफ कौंस ईड कौंसाबरोबर आहे,

आणि ह्या दोन कोंसांत अब कड कोंस मिळवि -
 ला असतां फ अब कड सगळ्या कोंस ईड -
 क ब अ सगळ्या कोंसाबरोबर होईल, म्हणून
 अ फ ई कोन फ ईड कोनाबरोबर आहे, आणि
 ह्याप्रमाणेच सिद्ध होतें, कीं अब कड ई फ ह्या ष-
 ट्कोणाचे इतर कोन फ ईड कोनाबरोबर आहेत,
 म्हणून हें षट्कोण समकोण आहे, आणि हें समभु-
 ज आहे असें सिद्ध केले आहेच, ह्या करितां अब क-
 ड ई फ वर्तुळांत समभुज समकोण षट्कोण का-
 टले असे.

कु० ह्यावरून स्पष्ट आहे, कीं वर्तुळांतील षट्को-
 नाची बाजू त्रिज्येबरोबर असते. अ, ब, क, ड,
 ई, फ ह्या बिंदूंतून वर्तुळास स्पर्शरेषा केल्या अस-
 तां त्यांच्या योगानें वर्तुळास सभोंवती संलग्न समभुज
 समकोण षट्कोण होईल, आणि त्याविषयीं सि-
 द्धता समभुज समकोन पंच कोणाप्रमाणेंच होय.
 समभुज समकोण षट्कोणा सभोंवती व त्याचे
 आंत संलग्न वर्तुळ समभुज समकोण पंच कोणासभोंवती
 व त्याचे आंत संलग्न वर्तुळ काढण्याविषयीं जी
 रीत योजिली आहे, ह्यारीतीनें च होते.

१६ सिद्धांत कृत्य.

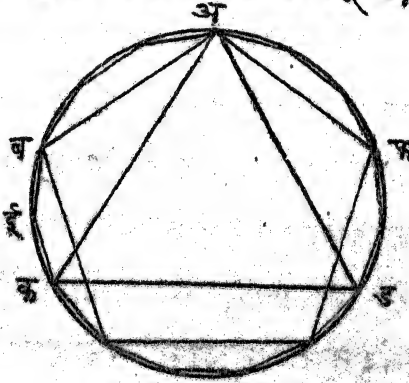
वर्तुळांत समभुज समकोण पंचदशकोण काढावयाचे.

अबकड एकवर्तुळ आहे, त्यांत समभुज समकोण पंचदशकोण काढावयाचे.

अबकड वर्तुळांत (४ बु० २ व्या सि० प्र०) काढलेल्या समभुज त्रिकोणाची बाजू अक आहे, व (४

बु० ११ व्या सि०

प्र०) काढलेल्या समभुज समकोण पंचकोणाची बाजू अब आहे, असें



मानूं. समभुज पंचदशकोण वर्तुळांत निघालें असतां, त्याच्या घोगातें वर्तुळाचे पंधराभाग समान होतील. आतां वर्तुळाचा द्वितीयांश जो अबककौस ह्यांत समभुज पंचदशकोणाचे पांचभाग आहेत.

† पंचदश म्हणजे पंधरा.

व वर्तुळाचा पंचमांश जो अव कौंस ह्यांत तीन भाग आहेत, असें म्हणण्यास चिंता नाही; तेव्हां अ-क आणि अव ह्या दोन कौंसांची वजाबाकी जो व क कौंस त्यांत पंचदश कोणाचे दोन भाग आहेत, हे स्पष्टच आहे. (३ बु० २० व्या सि० प्र०) व क कौंसाचे ई स्थळीं दोन समान भाग कर. व-ई आणि ई क ह्या दोन कौंसांतील प्रत्येक कौंस वर्तुळाचा पंधरावा भाग आहे. व ई आणि ई क ह्या जर दोन रेषा काढल्या आणि जर (४ व्या बु० १ व्या सि० प्र०) त्यांची समअशा रेषा वर्तुळांत काढीत गेले, तर समभुज समकोण पंचदशकोण होईल.

समभुज समकोण पंचदशकोणाच्या कोण बिंदूंतून वर्तुळास स्पर्शरेषा केल्या असतां त्यांच्या योगानें वर्तुळास भोंवती संलग्न समभुज समकोण पंचदशकोण होईल. समभुज समकोण पंचकोणास भोंवती व त्याचे आंत संलग्न वर्तुळ काढण्याची जी रीत सांगितली आहे, त्या रीतीनेच समभुज समकोण पंचदशकोणास भोंवती व त्याचे आंत संलग्न वर्तुळ काढतां येते.

चवथ्याबुकाचे प्रश्न.

१ विवक्षितबिंदु वर्तुळाचे बाहेर असो, किंवा त्याचे आंत असो, त्यांतून जाणारी व विवक्षित रे-
षेशी समान होणारी अशी एक ज्या काढावयाची.

२ एका विवक्षित रेषेशी समान व दुसऱ्या वि-
वक्षित रेषेशी समांतर किंवा तीस मिळाली अस-
ता विवक्षित कोना एवढा तिशी कोन करणारी अ-
शी एक ज्या वर्तुळांत काढावयाची.

३ वर्तुळास अशी स्पर्शरेषा काढावयाची आहे,
कीं ती विवक्षित रेषेशी समांतर होईल.

४ वर्तुळास अशी स्पर्शरेषा काढावयाची आहे,
कीं ती विवक्षित रेषेस मिळाली असता त्यांच्या म-
ध्ये जो कोन होईल तो विवक्षित कोना एवढा हो-
ईल.

५ विवक्षित रेषेंत असा एक बिंदु काढावयाचा
आहे, कीं तो त्या रेषेंतील विवक्षित बिंदूपासून व
दुसऱ्या विवक्षित रेषेपासून सारखे अंतरावर हो-
ईल.

६ विवक्षित रेषेस विवक्षित बिंदूत स्पर्शकर-

णारें व दुसऱ्या एका विवक्षित बिंदूतून जाणारें असें
वर्तुळ काढावयाचें.

७ अशी एक रेषा काढावयाची आहे, कीं ती दोन
वर्तुळांस स्पर्शरेषा होईल.

८ विवक्षित रेषेत असा एक बिंदु काढावयाचा
आहे, कीं तो विवक्षित बिंदूपासून व दुसऱ्या एका
विवक्षित रेषेपासून सारख्या अंतरावर होईल.

९ दोन विवक्षित बिंदूतून जाणारें व विवक्षित
रेषेस स्पर्श करणारें असें एक वर्तुळ काढावयाचें.

१० विवक्षित रेषेस विवक्षित स्थानीं स्पर्श करणारें
व विवक्षित वर्तुळास स्पर्श करणारें असें एक वर्तुळ
काढावयाचें.

११ वर्तुळाच्या आंतील संलग्न अष्टकोणाचें क्षेत्र-
फल त्याच वर्तुळाचे बाहेरील संलग्न चौरसाची ए-
क बाजू आणि आंतील संलग्न चौरसाची एक बा-
जू त्यांच्या काटकोनचौ कोनाबरोबर असतें.

१२ विवक्षित वर्तुळपादांत संलग्न वर्तुळ काढा-
वयाचें.

१३ विवक्षित बिंदूतून जाणारें व विवक्षित
वर्तुळास विवक्षित स्थलीं छेदणारें असें एक वर्तु-

ळ काढावयाचे.

१४ वर्तुळा सभोंवती संलग्न चौकोन काढलें असतां त्याच्या समोरासमोरच्या बाजूंची बेरीज त्याच्या सर्वबाजूंच्या परिमिताच्या अर्धाबरोबर असते.

१५ बहुकोणाकृतीच्या सर्वबाजू दोन्ही टोंकांकडे वाढविल्या असतां, त्या मिळून जे कोन होतात, त्यांमध्ये आठ काढकोन मिळविले तर सर्वकोन बहुकोणाकृतीच्या बाजूंच्या संख्येचे दुप्पट काढकोनांबरोबर असतात.

१६ काढकोन चौकोनाच्या समोरासमोरच्या दोन बाजूंवर त्यांचे एकेच अंगास त्या बाजूंच्यास कल्पून अर्धवर्तुलें काढलीं असतां, त्या अर्धवर्तुलांचे परिघ व काढकोन चौकोनाच्या दुसऱ्या दोन बाजू ह्यांच्या मध्ये जें क्षेत्र सांपडतें तें काढकोन चौकोनाच्या क्षेत्रफळाबरोबर असतें.

१७ विवक्षित बिंदूतून जाणारें व विवक्षित दोन रेषांस स्पर्श करणारें असें एक वर्तुळ काढावयाचे.

१८ विवक्षित वर्तुळास विवक्षित दोन रेषांस

५ बूक.

व्याख्या.

१ महत्व लक्षून दोन सरूपपदांचा जो परस्पर संबंध त्यास गुणोत्तर असें म्हणतात. अ आणि ब ह्या दोन सरूपपदांचा संबंध अः ब किंवा $\frac{अ}{ब}$ असा लिहितात.

२ गुणोत्तराचे पहिले पदास अग्रसर असें म्हणतात, आणि दुसरेपदास उपाग्रसर असें म्हणतात.

३ ज्या मोठ्यापदामध्ये लहानपद कांहींवेळ बरोबर जाते त्या मोठ्यापदास त्या लहानपदाचे व्यापक असें म्हणतात, आणि त्या लहानपदास त्या मोठ्यापदाचे व्याप्य असें म्हणतात.

४ ज्या व्यापकांतून पदे सारखेवेळ जातात, त्या व्यापकांस त्यापदांची समव्यापके असें म्हणतात.

५ चारपदे असलीं, आणि पहिलें पद आणि तिसरें पद ह्यांची जीं पाहिजेत तीं समव्यापके घेतलीं, व दुसरें पद आणि चौथें पद ह्यांची जीं पाहिजेत तीं समव्यापके घेतलीं, आणि जर पहिले पदाचे व्यापक दुसरेपदाचे व्यापकापेक्षा मोठे असले, आणि त्याप्रमाणेंच तिसरेपदाचे व्यापक चौथेपदाचे

व्यापकापेक्षां मोठें असलें, किंवा जर पहिले पदाचें व्याप-
क दुसरे पदाचे व्यापकाबरोबर असलें, आणि त्याप्र-
माणेंच तिसरे पदाचें व्यापक चौथे पदाचे व्यापकाबरो-
बर असलें, किंवा जर पहिले पदाचें व्यापक दुसरे पदाचे
व्यापकापेक्षां कमी असलें, आणि त्याप्रमाणेंच तिसरे प-
दाचें व्यापक चौथे पदाचे व्यापकापेक्षां कमी असलें, तर
पहिलें पद आणि दुसरें पद ह्यांचें गुणोत्तर तिसरें पद
आणि चौथें पद ह्यांचे गुणोत्तराबरोबर आहे.

६ चार पदांत पहिलें पद आणि दुसरें पद ह्यांचें गु-
णोत्तर जर तिसरें पद आणि चौथें पद ह्यांचे गुणोत्तरा
बरोबर असलें, तर तीं चार पदे प्रमाणांत आहेत अ-
सें म्हणतात, आणि त्या प्रमाणास चतुः प्रमाण असें
म्हणतात.

७ अ, ब, क, ड चार पदे प्रमाणांत असल्यास
अस जर ब तर क स ड असें लिहितात, व अः
बः :: कः ड ह्या प्रमाणेंही लिहितात.

१ सिद्धांत.

चार पदे प्रमाणांत असल्यास आद्यंत पदां-
चा गुणाकार मध्यपदांचे गुणाकाराबरोबर असतो.

अः बः :: कः उ असें आहे, त्यास अ
उ = ब क हे सिद्ध करावयाचे.

$\frac{अ}{ब} = \frac{क}{उ}$ असें आहे. ब उ ह्या पदानें
दोन्ही पैल्यांचे अंशांस गुणिलें, तर $\frac{अ ब उ}{ब} =$
 $\frac{क ब उ}{उ}$ असें होतें. संक्षेपानें अ उ = क ब
हे सिद्ध.

कु० ह्या वरून स्पष्ट दिसतें, कीं. तीनपदें अखंड
प्रमाणांत असल्यास आद्यंतपदांचा गुणाकार मध्य-
पदांचे वर्गाबरोबर असतो.

२. सिद्धांतः

दोनपदांचा गुणाकार जर दुसऱ्या दोनपदां-
च्या गुणाकाराबरोबर असला, तर तीं चारपदें पर-
स्पर प्रमाणांत असतात.

अ आणि उ ह्या पदांचा गुणाकार ब
आणि क ह्या पदांचे गुणाकाराबरोबर आहे, त्यास
अः बः :: कः उ, हे सिद्ध करावयाचे.

अ उ = ब क ह्या समीकरणा-
 दोन्ही पैव्यांस ब उ ह्यानें भागिलें असतां
 $= \frac{क}{उ}$ असें होतें, म्हणून अः बः :: कः
 हें सिद्ध.

३ सिद्धांत.

ज्या पदांचे दुसऱ्या एका पदाशीं समान
 गुणोत्तर असतें, तीं पदे समान असतात.

अ आणि ब ह्यांचें गुणोत्तर क शीं स
 आहे, ह्या करितां अ, ब बरोबर आहे, हें
 करावयाचें.

$\frac{अ}{ब} = \frac{क}{क}$ ह्या समीकरणाचे दोन्ही पै
 क नें गुणिलें असतां $\frac{अ क}{ब} = \frac{ब क}{क}$ असें
 म्हणून अ = ब हें सिद्ध.

४ सिद्धांत.

जीं गुणोत्तरे दुसऱ्या एका गुणोत्तराशीं स
 न असतात, तीं परस्पर समान असतात.

अः बः :: क्षः य, आणि कः उः :: क्षः

रावयाचें. अः बः :: क्षः य म्हणजे $\frac{अ}{ब} = \frac{क्ष}{य}$
 आणि कः डः :: क्षः य म्हणजे $\frac{क}{ड} = \frac{क्ष}{य}$
 पून $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ म्हणजे अः बः :: कः ड हे
 उघड आहे.

५ सिद्धांत.

चतुष्प्रमाणांतील पदे परावर्तनाने प्रमाणांत
 असतात.

अः बः :: कः ड असें आहे, त्यास अः
 कः :: बः ड असें सिद्ध करावयाचें.

$\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ ह्या समीकरणांतील दोन्ही ने -
 त्यांस $\frac{ब}{क}$ ह्याने गुणिलें असतां, $\frac{अब}{बक} = \frac{बक}{कड}$
 असें होतें, म्हणून संक्षेपानें $\frac{अ}{क} = \frac{ब}{ड}$ म्हणजे
 अः कः :: बः ड हे सिद्ध.

६ सिद्धांत.

चतुःप्रमाणांतील पदे व्यस्तीकरणाने प्रमा-
 णांत असतात.

अः बः :: कः ड असें आहे, त्यास

बः अः : उः क असें सिद्ध करावयाचे.

$\frac{अ}{ब} = \frac{क}{उ}$ ह्या समीकरणांतील दोन्ही पे-
ठ्यांनी एकास भागिलें असतां $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{उ}$ असें
होतें, म्हणजे $\frac{ब}{अ} = \frac{उ}{क}$ म्हणजे बः अः : उः
क हें सिद्ध.

७ सिद्धांत.

चतुः प्रमाणांतील पदे मिश्रणानें प्रमाणांत
होतात.

अः बः : कः उ असें आहे, त्यास अ
+ बः बः : क + उः उ हें सिद्ध करावयाचे.

$\frac{अ}{ब} = \frac{क}{उ}$ ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेठ्यां-
त एक मिळविला असतां $\frac{अ + ब}{ब} = \frac{क + उ}{उ}$
असें होतें, म्हणजे अ + बः बः : क + उः उ
हें सिद्ध.

८ सिद्धांत.

चतुः प्रमाणांतील पदे कजाबाकीनें प्रमा-
णांत होतात.

अः बः : कः उ असें आहे, त्यास

अ-बः बः :: क-डः ड हैं सिद्ध कराव -
याचें.

$\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ ह्या समीकरणाचे दोन्ही पेढ्यां-
तून एक वजा केला असता $\frac{अ-ब}{ब} = \frac{क-ड}{ड}$
असें होतें, म्हणजे अ-बः बः :: क-डः ड
हैं सिद्ध.

कु० हा सिद्धांत व मागील सिद्धांत ह्यांपासून
स्पष्ट दिसून येतें, कीं चतुः प्रमाणांतील पहिलें प-
द आणि दुसरें पद ह्यांच्या बेरजेस जर त्यांची वजा-
बाकी तर तिसरें पद आणि चौथें पद ह्यांच्या बेर-
जेस त्यांची वजाबाकी, म्हणजे अ+बः अ-
बः :: क+डः क-ड. मिश्रणांत $\frac{अ+ब}{ब} = \frac{क+ड}{ड}$
 $= \frac{क+ड}{ड}$ वजाबाकीने $\frac{अ-ब}{ब} = \frac{क-ड}{ड}$
ह्या दोन्ही समीकरणांचा भागाकार घेतल्याने
 $\frac{अ+ब}{ब} \times \frac{ब}{अ-ब} = \frac{क+ड}{ड} \times \frac{ड}{क-ड}$
असें होतें, म्हणजे $\frac{अ+ब}{अ-ब} = \frac{क+ड}{क-ड}$ म्ह-
णजे अ+बः अ-बः :: क+डः क-ड
हैं सिद्ध.

९ सिद्धांत.

चतुः प्रमाणांतील पदे वस्तु वजा बाकीने प्रमाणांत होतात.

अः बः :: कः उ असें आहे, त्यास
अः अ-ब :: कः क-उ हें सिद्ध कराव-
याचें.

परावर्तनानें बः अ :: उः क म्हणून
 $\frac{ब}{अ} = \frac{उ}{क}$ ह्या दोन्ही समकरणाचे पेटे एकांतून
वजा केले असतां $\frac{अ-ब}{अ} = \frac{क-उ}{क}$ असें
होतें, पुनः परावर्तनानें $\frac{अ}{अ-ब} = \frac{क}{क-उ}$
म्हणून अः अ-ब :: कः क-उ हें सिद्ध.

१० सिद्धांत.

चतुः प्रमाणांतील पदे बेरजेनें प्रमाणांत हो-
तात.

अः ब :: कः उ असें आहे, त्यास अः
अ + ब :: कः क + उ हें सिद्ध करावयाचें.

परावर्तनानें $\frac{ब}{अ} = \frac{उ}{क}$ ह्या समीकरणाचे
दोन्ही पेट्यांत एक मिळविला म्हणजे $\frac{अ + ब}{अ}$

= $\frac{क + उ}{क}$ असें होतें. पुनः परावर्तनानें $\frac{अ}{अ + ब} =$
 $\frac{क}{क + उ}$ म्हणून अः अ + ब :: कः क + उ हे
 सिद्ध.

११ सिद्धान्त.

ज्यांच्या पदांची संख्या मारखी आहे, अशा दोन श्रेण्यांतील जर दोन दोन ह्या प्रमाणें सर्वपदे सरळ क्रमानें परस्पर प्रमाणांत असलीं तर पहिल्या श्रेणीच्या पहिल्या पदास जर तिचें शेवटचें पद तर दुसऱ्या श्रेणीच्या पहिल्या पदास तिचें शेवटचें पद, असें असतें.

अ, ब, क, उ आणि ई, फ, ग, ह अशा दोन श्रेण्या आहेत, आणि त्यांतील दोन दोन ह्या प्रमाणें सर्वपदे सरळ क्रमानें परस्पर प्रमाणांत आहेत. म्हणजे अः ब :: ईः फ, बः क :: फः ग, आणि कः उ :: गः ह, त्यास अः उ :: ईः ह हे सिद्ध करावयाचे. $\frac{अ}{ब} = \frac{ई}{फ}$, $\frac{ब}{क} = \frac{फ}{ग}$ आणि $\frac{क}{उ} = \frac{ग}{ह}$ असें आहे, तेव्हां ह्या समीकरणांचा गुणाकार घेतला असतां $\frac{अबक}{फगह} = \frac{ईगफ}{बकउ}$ असें येतें. संक्षेप दिला असता

$\frac{अ}{उ} = \frac{ई}{ह}$ असें राहाते, म्हणून अः उः :: ईः हः
हें उघड आहे.

१२ सिद्धांत.

ज्यांच्या पदांची संख्या सारखी आहे, अशा दोन श्रेण्यांतील जर दोन दोन ह्या प्रमाणें सर्वपदे वक्र क्रमानें प्रमाणांत असलीं तर पहिल्या श्रेणीच्या पहिल्या पदास जर तिचें शेवटचें पद तर दुसऱ्या श्रेणीच्या पहिले पदास तिचें शेवटचें पद, असें असतें.

अ, ब, क, उ आणि ई, फ, ग, ह अशा दोन श्रेण्या आहेत, आणि त्यांतील दोन दोन ह्या प्रमाणें सर्वपदे वक्र क्रमानें प्रमाणांत आहेत, म्हणजे अः बः :: गः ह, बः कः :: फः ग आणि कः उ ईः फ, त्यास अः उः :: ईः ह हें सिद्ध करावयाचें.

$\frac{अ}{ब} = \frac{ग}{ह}, \frac{ब}{क} = \frac{फ}{ग}$ आणि $\frac{क}{उ} = \frac{ई}{ह}$
असें आहे, तेव्हा ह्या सर्व समीकरणांचा गुणाकार घेतला असता $\frac{अ \cdot ब \cdot क}{उ \cdot ब \cdot क} = \frac{ग \cdot फ \cdot ई}{ह \cdot ग \cdot फ}$ संक्षेपानें $\frac{अ}{उ} = \frac{ई}{ह}$ असें राहातें, म्हणून अः उः :: ईः ह हें उघड आहे.

१३ सिद्धांत.

जीं चार पदें प्रमाणांत असतात त्यांचा को-
णताही घात केला किंवा कोणतेही घातमूळ का-
ढलें तरी तीं पदें प्रमाणांत असतात.

अ, ब, क आणि ड हीं चार पदें प्रमा-
णांत आहेत, त्यास त्यांचा कोणताही घात केला,
किंवा त्यांचें कोणतेही घातमूळ काढलें तरी तीं प्रमा-
णांत आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

$\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ ह्या समीकरणाने दोन्ही पेश्यां-
चा न घात कर. तेव्हां $(\frac{अ}{ब})^n = (\frac{क}{ड})^n$ म्ह-
णजे $\frac{अ^n}{ब^n} = \frac{क^n}{ड^n}$ म्हणून अⁿ : बⁿ :: कⁿ :
डⁿ हें सिद्ध आतां $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ ह्या समीकरणानें
न घातमूळ काढ. तेव्हां $\sqrt[n]{\frac{अ}{ब}} = \sqrt[n]{\frac{क}{ड}}$
म्हणजे $\frac{\sqrt[n]{अ}}{\sqrt[n]{ब}} = \frac{\sqrt[n]{क}}{\sqrt[n]{ड}}$ म्हणून $\sqrt[n]{अ} : \sqrt[n]{ब} ::$
 $\sqrt[n]{क} : \sqrt[n]{ड}$ हें सिद्ध.

१४ सिद्धांत.

जर किती एक पदें प्रमाणांत असलीं, तर

पहिल्या अग्रसरास जर पहिला उपाग्रसर तर
सर्व अग्रसरांचे बेरजेस सर्व उपाग्रसरांची बे-
रीज.

अ, ब, क, ड, ई, फ, ग, ह हीं पदे प्रमा-
णांत आहेत, म्हणजे अः बः :: कः ड :: ईः
फः :: गः ह त्यास अः बः :: अ + क + ई
+ गः ब + ड + फ + ह हें सिद्ध करावयाचें.
अब = अब | असें आहे, त्यास ह्या समीकरणांची
अड = बक | बेरीज घेतली असतां अ ब + अ
अफ = बई | ड + अफ + अह = अब
अह = बग | बक + बई + बग अमें होतें.
हें समीकरण अ (ब + ड + फ + ह) = ब
(अ + क + ई + ग) असें लिहिल्यास चा-
लेल. म्हणजे अः बः :: अ + क + ई + गः
ब + ड + फ + ह, हें सिद्ध.

कु० ही गोष्ट स्पष्ट आहे, कीं किती एक पदे प्रमाणां-
त असल्यास कोणत्याही अग्रसरास जर त्याचा
उपाग्रसर तर सर्व अग्रसरांचे बेरजेस सर्व उपाग्र-
सरांची बेरीज.

१५ सिद्धांत.

जर तीन पदें अखंड प्रमाणांत असलीं, तर पहिल्या पदास जर तिसरें पद तर पहिले पदाचे वर्गास दुसरे पदाचा वर्ग.

अ, ब, क हीं तीन पदें अखंड प्रमाणांत आहेत, म्हणजे अः बः :: बः कः, त्यास अः कः :: अः :: बः हे सिद्ध करावयाचे.

$\frac{अ}{ब} = \frac{ब}{क}$ असें आहे, त्यास ह्या समीकरणास $\frac{अ}{ब}$ ह्याने गुणलें असतां $\frac{अ}{ब} = \frac{अ}{क}$ म्हणजे अः कः :: अः बः हे सिद्ध.

१६ सिद्धांत.

जर चार पदें अखंड प्रमाणांत असलीं, तर पहिल्या पदास जर चवथें पद तर पहिल्या पदाचे घनास दुसरे पदाचा घन.

अ, ब, क, ड हीं चार पदें अखंड प्रमाणांत आहेत, म्हणजे अः बः :: बः कः :: कः डः त्यास अः डः :: अः बः हे सिद्ध करावयाचे.

$\frac{अ}{ब} = \frac{ब}{क}$, $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ आणि $\frac{अ}{ब} = \frac{अ}{ब}$

असें आहे, तेव्हां ह्या समीकरणांचा गुणाकार घेवला

असतां $\frac{A}{B} = \frac{A}{D}$ असें होतें, म्हणजे $A : D ::$

$A : B$ हे सिद्ध.

६वूक.

व्याख्या.

१. सगळ्या रेघेस जर मोठा खंड तर मोठ्या खंडास लहानखंड ह्या प्रमाणें एकारेघेचे दोन खंड पाडले असतां अंत्य मध्यप्रमाणानें त्या रेघेचे खंड पडले असें म्हणतात.

२. सगळ्या रेघेस जर एका टोंकाकडील खंड तर दुसरे टोंकाकडील खंडास मध्यखंड, ह्या प्रमाणें एका रेघेचे तीन खंड पाडले असतां गायन प्रमाणानें त्या रेघेचे खंड पडले असें म्हणतात.

३. पहिले रेघेस जर तिसरी रेघ तर पहिली आणि दुसरी ह्यांच्या वजाबाकीस दुसरी आणि तिसरी ह्यांची वजाबाकी, ह्या प्रमाणें तीन रेघा असल्या तर त्या गायन प्रमाणांत आहेत असें म्हणतात.

४. ह्या वरील प्रमाणांत तीन रेघां पैकीं मध्यरेघेस गायन मध्यरेषा असें म्हणतात.

५. एका बिंदूपासून चार रेघा निघून त्यांनीं एका रेघेस गायन प्रमाणानें छेदले असतां त्या रेघांस

गायन प्रमाण छेदक रेषा असें म्हणतात.

६ ज्या दोन आकृतींमध्ये एका आकृतीचे कोन प्रत्येकीं दुसऱ्या आकृतीचे कोनावरोबर असतात, व समान कोनांजवळच्या बाजू प्रमाणांत असतात, त्या आकृतींस सरूपाकृति असें म्हणतात.

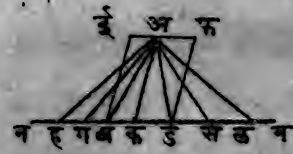
७ एका आकृतीच्या दोन बाजूं पैकीं एके बाजूस जर दुसऱ्या आकृतीच्या दोन बाजूं पैकीं एक बाजू तर त्याच आकृतीचे दुसरे बाजूस पाहिले आकृतीची दुसरी बाजू, असें असल्यास त्या दोन आकृतींच्या त्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत आहेत, असें म्हणतात.

६ बूक.

१ सिद्धांत.

एका उंचीचे त्रिकोण व समांतरभुज चौको-
न हे आपल्या पायांशीं प्रमाणांत असतात.

अ ब क आणि अ क ड त्रिकोण व ई
क आणि फ क समांतरभुजचौकोन एका उंचीचे[‡]
आहेत, त्यास ते त्रिकोण
व समांतरभुजचौकोन
आपले पायांशीं प्रमाणां
त आहेत, म्हणजे बकः



कडः :: अ ब कः
अ क ड, तसेंच ब कः कडः :: ई कः फ क,
हे सिद्ध करावयाचे.

ब ड बाजू दोहों अंगांस न आणि म बिं -
दूपर्यंत वाढीव. ब क रेघे एवढे ब ग आणि
ग ह असे दोन भाग बन रेघेचे पाड, व क म

‡ उंची हा शब्दानें लंबरूप उंची समजावयाची, आणि अ
शिरोबिंदूपासून ब ड पायावर जो लंब होईल तो येथें उंची होय.

रेघेचें कड रेघे एवढें डस आणि सल असे
 दोन भाग पाड. अ, ह, अ, ग, अ, स आणि अ,
 ल बिंदु सांध. ह, ग, ग, ब आणि ब, क रेखाव-
 रोबर आहेत, ह्याकरितां (१ बु० ३८ व्या सि० प्र०)
 अ, ह, ग, अ, ग, ब आणि अ, ब, क हे त्रिको-
 ण परस्पर बरोबर आहेत, ह्या प्रमाणेंच अ, क, ड,
 अ, ड, स आणि अ, स, ल हे त्रिकोण परस्पर
 बरोबर आहेत, म्हणून ह, क पाया ब, क च्या जितके पट
 आहे, तितके पट अ, ह, क त्रिकोण अ, ब, क त्रिकोणाच्या
 आहे, तसेंच क, ल पाया क, ड च्या जितके पट आ-
 हे तितके पट अ, क, ल त्रिकोण अ, क, ड त्रिकोणा-
 च्या आहे. जर ह, क पाया क, ल पाया बरोबर अ-
 सेल तर अ, ह, क त्रिकोण अ, क, ल त्रिकोणा ब-
 रोबर होईल; जर ह, क पाया क, ल पायापेक्षां मो-
 ठा असेल तर अ, ह, क त्रिकोण अ, क, ल त्रिको-
 णापेक्षां मोठा होईल; आणि जर ह, क पाया क, ल
 पायापेक्षां लहान असेल तर अ, ह, क त्रिकोण अ, क-
 ल त्रिकोणापेक्षां लहान होईल. ब, क आणि क,
 ड पाये आणि अ, ब, क आणि अ, क, ड त्रिको-
 ण अशीं चार पदे आहेत. प्रथम पद ब, क पाया

आणि तिसरें पद अ ब क त्रिकोण ह्यांचीं समान
 व्यापकें ह क पाया आणि अ ह क त्रिकोण आ-
 हेत, व दुसरें पद क ड पाया आणि चौथें पद अ
 क ड त्रिकोण ह्यांचीं समान व्यापकें क ल पाया
 आणि अ क ल त्रिकोण आहेत, आणि पूर्वी दर्श-
 विलें आहे, कीं ह क पाया जर क ल पायापेक्षां मो-
 ठा असेल, तर अ ह क त्रिकोण अ क ल त्रिको-
 णापेक्षां मोठा होईल, बरोबर असल्यास बरोबर हो-
 ईल व लहान असल्यास लहान होईल, म्हणून
 (५ बु० ५ व्या व्या० ब०) ब क पायास जर क ड
 पाया तर अ ब क त्रिकोणास अ क ड त्रिकोण,
 ह्या करितां एका उंचीचे त्रिकोण आपल्या पायांशीं
 प्रमाणांत असतात, हें सिद्ध.

(१ बु० ४१ व्या सि० प्र०) ई क समांतरभु-
 ज चौकोन अ ब क त्रिकोणाच्या दुप्पट आहे,
 आणि फ क समांतरभुज चौकोन अ क ड त्रि-
 कोणाच्या दुप्पट आहे, आणि पदे आपल्या समान
 व्यापकांशीं प्रमाणांत असतात, हें उघड आहे, ह्याक-
 रितां अ ब क त्रिकोणः अ क ड त्रिकोणः :: ई क

चौरसः फ क चौरस. वर सिद्ध केलें आहे, की ब कः
 कडः :: अब कः अकड ह्या करितां (१ बु०
 ४ व्या सि० प्र०) ब कः कडः :: ई कः फ क
 १ कु० समान उंचीचे त्रिकोण व समांतरभुज चौ-
 कोन हे आपल्या पायांशीं प्रमाणांत असतात, हें वरील
 सिद्धतेवरून स्पष्ट आहे.

ह्या आकृति अशा ठेवाव्या, कीं त्यांचे पाये एका-
 च सरळरेषेंत येतील. आतां, ह्या आकृतींचीं शिरे
 सांधणारी रेषा त्यांचे पाये ज्या रेषेंत आहेत तिशीं स-
 मांतर होईल, हें (१ बु० ३४ व्या सि० कु० वरून)
 स्पष्ट आहे. हा सिद्धांत सिद्ध करून दारवाविण्या करि-
 तां जी आकृति केली आहे ती प्रमाणें आकृति केली
 असतां ही कुरलरी सिद्ध होईल.

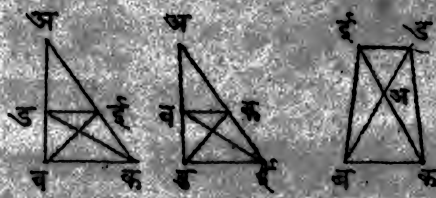
२ कु० ज्यांचे पाये समान आहेत असे काढकोन
 चौकोन समांतरभुज चौकोन व त्रिकोण हे आपल्या
 उंचीशीं प्रमाणांत असतात.

२ सिद्धांत.

त्रिकोणाच्या कोणत्याही बाजूशीं एकरेषा समां-
 तर केली असतां ती रेषा त्रिकोणाच्या दुसऱ्या कोन

बाजूंस त्या आहेत तराच असतां किंवा त्या वाढवि-
ल्या असतां प्रमाणानें छेदते, आणि जी रेषा त्रिको-
णाच्या दोन बाजूंस त्या आहेत तराच असतां किंवा
त्या वाढविल्या असतां प्रमाणानें छेदते ती रेषा त्रि-
कोणाचे तिसरे बाजूशीं समांतर असते.

अबक एक त्रिकोण आहे, त्याच्या ब
क बाजूशीं ड
ई रेषा समांतर
केली आहे, त्यास
डई रेषा अब
क त्रिकोणाच्या



दुसऱ्या दोन अब आणि अक ह्या बाजूंस
प्रमाणानें छेदते, म्हणजे बडः डअःः कईः
ईअ, हे सिद्ध करावयाचे.

बई आणि कड सांध. बईड आणि
कडई हे दोन त्रिकोण डई पायावर आणि
डई आणि बक ह्या दोन समांतर रेषांच्या जो-
डांत आहेत, ह्याकरितां (१ बु० ३७ व्या सि० प्र०)
ते दोन त्रिकोण समान आहेत. समान पदांचे दु-
सरे एकापदाशीं समानच गुणोत्तर असते, हे स्पष्ट

आहे, ह्या करितां बड्ड आणि कड्ड ह्या दोन त्रिकोणांचे अड्ड त्रिकोणाशीं समानच गुणोत्तर आहे, म्हणजे बड्डः अड्डः :: कड्डः अड्डः. बड्ड आणि अड्ड हे दोन त्रिकोण एकेच उंचीचे आहेत, व कड्ड आणि अड्ड हे दोन त्रिकोणही एकेच उंचीचे आहेत, ह्या करितां (६ बु० १ व्या सि० प्र०) बड्डः अड्डः :: बड्डः डअ, आणि कड्डः अड्डः :: कड्डः ईअ, ह्या करितां (५ बु० ४ व्या सि० प्र०) बड्डः डअः :: कड्डः ईअ, हे सिद्ध.

आतां अबक त्रिकोणाच्या अब आणि अक ह्या दोन बाजूंस ड्ड रेख प्रमाणानें छेदते, त्यास ती रेख बक शीं समांतर आहे, हे सिद्ध करावयाचें.

ड, क आणि ब, ई सांध. बड्डः डअः :: कड्डः ईअ असें गृहीतच आहे, व (६ बु० १ व्या सि० प्र०) बड्डः डअः :: बड्डः ईडअ, व कड्डः ईअः :: कड्डः डईअ, ह्या वस्तुन हे स्पष्ट आहे, कीं बड्डः ईड

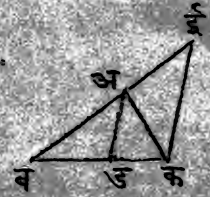
अः कडईः डईअ; म्हणजे ईडअनि-
 कोणाशीं बडई व कडई ह्या दोन त्रिकोणा-
 चें गुणोत्तर एकच आहे, व ह्यास व (१ बु० ३ व्या सि० प्र०) बड
 ई आणि कडई हे दोन त्रिकोण बरोबर आहेत. हे दोन त्रि-
 कोण एकेच पायावर आहेत, पण एकाच पायावरील स-
 मान त्रिकोण (१ बु० १९ व्या सि० प्र०) समांतर रेखांचे जोडोत
 असतात, ह्याकरितां डई रेघ बक रेघेशीं समांतर आहे, हे सि-
 ड्.

३ सिद्धांत.

त्रिकोणाच्या शिरकोनाचे समान दोन भाग
 करणारी अशी रेघ पायापर्यंत केली असता त्या रे-
 घेने पायाचे जे दोन खंड होतात, ते खंड दुसऱ्या
 दोन बाजूंशीं प्रमाणांत असतात; व कोणत्याही त्रि-
 कोणाच्या पायाचे दोन खंड दुसऱ्या दोन बाजूंशीं प्र-
 माणांत असल्यास छेदन बिंदूपासून शिरकोना पर्यंत
 रेघ केली तर ती रेघ शिरकोनाचे समान दोन भा-
 ग करिते.

अबक एक त्रिकोण आहे, त्याच्या बअ-
 क शिरकोनाचे अडरेघ दोन समान भाग

करिते, आणि बकपा-
यास ड बिंदुस्थलीं छेदि-
ते, त्यास बडः डकः.
अबः अक, हें सिद्ध
करावयाचें.



(१ बु० ३१ व्या सि० प्र०) क बिंदूतून क-
ई रेघ अड रेघेरीं समांतर कर, आणि ब अ
रेघ ई बिंदूस मिळे तोंपर्यंत वाढीव. अड आ-
णि ई क ह्या दोन समांतर रेखांस अक रेघ मि-
ळते, तेव्हां (१ बु० २९ व्या सि० प्र०) अकई
कोन क अड कोनाबरोबर आहे, परंतु ब अ
ड कोन क अड कोनाबरोबर आहे, कारण ब
अक कोनाचे अड रेघ दोन समान भाग करिते,
ह्या करितां ब अड कोन अकई कोनाबरो-
बर आहे; बई रेघ अड आणि ई क ह्या दोन
समांतर रेखांस छेदते, ह्या करितां बाहेरील ब अड
कोन बई क कोनाबरोबर आहे, ह्या करितां अ
कई कोन अई क कोनाबरोबर आहे, आणि
ह्या करितां (१ बु० ६ व्या सि० प्र०) अई बाजू
अक बाजूबरोबर आहे. बई क त्रिकोणाच्या

ईक बाजूशीं अड रेष समान्तर केली आहे, ह्या
करितां (६ बु० २ व्या सि० प्र०) बडः डकः
बअः अई. अई अक बरोबर आहे,
ह्याकरितां बडः डकः बअः अक, हे
सिद्ध.

अबक त्रिकोणाच्या बक पायाचे ब
ड आणि कड हे दोन खंड ब अ आणि अक
ह्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत, म्हणजे बडः
डकः अबः अक, ह्यास ड डेदनवि-
डु आणि अ शिरकोन ह्यांस सांधणारी अड रेषा
ब अक शिरकोनाचे दोन समान भाग करिते, हे
सिद्ध करावयाचे.

पूर्वी प्रमाणेंच आकृति कर. बडः डकः
अबः अक असें गृहीत आहे, व अड बाजू
ईक बाजूशीं समान्तर आहे, ह्याकरितां (६ बु० २
व्या सि० प्र०) बडः डकः अबः अई,
ह्यास्तव (९ बु० ४ व्या सि० प्र०) अबः अकः
अब अई म्हणून (९ बु० ३ व्या सि० प्र०) अक
आणि अई ह्या दोन बाजू समान आहेत, ह्या करि-
तां (१ बु० ५ व्या सि० प्र०) अकई कोन अ

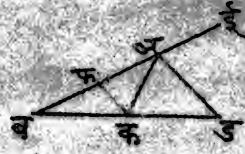
ईक कोनाबरोबर आहे; अड आणि ईक हा दोन रेघा समांतर आहेत, म्हणून अईक कोन बाहेरील व अड कोनाबरोबर आहे, व अकई व्युक्रमकोन ड अक व्युक्रमकोनाबरोबर आहे, त्यास्तव व अक कोनाचे अड रेघेनें दोन समान भाग केले आहेत, हे सिद्ध.

अ सिद्धान्त.

त्रिकोणाच्या बाहेरील कोनाचे दोन समान भाग करणारी आणि पाया वाढविला असतां त्यास मिळणारी अशी रेघ केली असतां ती रेघ आणि पायाचे दोन शेवट ह्यांच्यामध्ये जे पायाचे दोन खंड पडतात ते दुसऱ्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत असतात. त्रिकोणाचा पाया वाढविला असतां त्याचे जे दोन खंड पडतात, ते दुसऱ्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत असल्यास शिरकोनापासून छेदन बिंदूपर्यंत रेघ केली असता ती बाहेरील कोनाचे दोन समान भाग करते.

अबक त्रिकोणाच्या बाहेरील क अई कोनाचे दोन समान भाग करणारी व बक पाया वाढविला आहे, त्याला ड बिंदुस्थलीं मिळणारी

अशी एक अड रेघ केली आहे. अड रेघ आ-
णि ब क, पायाची ब आणि क दोघटे ह्यांच्या मधील
जे ब ड आणि ड क
खंड ते अ ब आणि अ
क ह्या दोन बाजूंची प्रमा-
णांत आहेत, म्हणजे ब



ड : ड क :: अ ब : अ क, हे सिद्ध करावयाचे.

(१ बु० ३१ व्या सि० प्र०) क बिंदूतून
क फ रेघ अड शी समांतर कर. फ क आणि
अ ड ह्या दोन समांतर रेखांस अ क रेघ मिळते,
त्यास (१ बु० २९ व्या सि० प्र०) फ क अ कोन
क अ ड कोनाबरोबर आहे. पण क अ ड को-
न ड अ ई कोनाबरोबर आहे, असें दृष्टीत आहे,
ह्यास्तब फ क अ कोन ड अ ई कोनाबरोबर आहे.
फ क आणि अ ड ह्या दोन समांतर रेखांवर ब फ
अ रेघ पडते, तेव्हां बाहेरील ड अ ई कोन आं-
तील पलीकडच्या अ फ क कोनाबरोबर आहे, आ-
तांच नुकते सिद्ध केले, कीं ड अ ई कोन अ क-
फ कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां अ क फ कोन
अ फ क कोनाबरोबर आहे, म्हणून (१ बु० ६ व्या

सि० प्र०) अफ बाजू अक बाजू बरोबर आहे.
 अबड त्रिकोणाचा अड बाजूंशीं फक्त रेषा-
 मांतर आहे, त्याकरितां (६ बु० १ व्या सि० प्र०) ब-
 डः डकः :: बअः अफ, पण अफ अ-
 क बरोबर आहे, त्याकरितां बडः डकः :: ब-
 अः अक, हे सिद्ध.

अबक त्रिकोणाचा बक पायडु पर्यंत
 वाढविला आहे, व त्याचे बड आणि कड हे दो-
 न खंड बअ आणि अक ह्या दोन बाजूंशीं प्रमा-
 णांत आहेत, त्यास अड रेषा कअई कोनाचे स-
 मान दोन भाग करिते, हे सिद्ध करावयाचे.

आकृति पूर्वी प्रमाणेंच कर. बडः डकः ::
 बअः अक हे गृहीत आहे, व (६ बु० १ व्या
 सि० प्र०) बडः डकः :: बअः अफ, त्या-
 करितां (९ बु० ४ व्या सि० प्र०) बअः अकः ::
 बअः अफ, ह्यावरून (९ बु० ३ व्या सि० प्र०)
 अक, अफ बरोबर आहे, म्हणून (१ बु० ९ व्या
 सि० प्र०) अफक कोन अकफ कोनाबरो-
 बर आहे, परंतु अफक कोन बाहेरील ईअ-
 ड कोनाबरोबर आहे, आणि अकफ कोन

क अ ड व्युत्क्रमकोनाबरोबर आहे, ह्या करितां ई
अ ड कोनक अ ड कोनाबरोबर आहे.

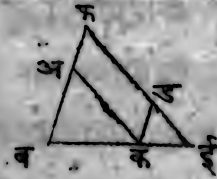
कु० त्रिकोणाच्या शिरकोनाचे दोन समानभाग कर-
णारी रेषा व शिरकोनाजवळील बाहेरच्या कोनाचे दो-
न समान भाग करणारी रेषा ह्या रेषा पाया वाढविला अ-
सतां त्यास गायन प्रमाणानें छेदितान.

टीप मागील सिद्धांताची प्रतिज्ञा व ह्या सिद्धांताची
प्रतिज्ञा ह्या दोन्ही मिळून एक प्रतिज्ञा लिहिली अस-
तां चालेल, ती अशी कीं त्रिकोणाच्या शिरकोनाचे दोन
समान भाग करणारी रेषा व शिरकोनाजवळच्या बाहेरी-
ल कोनाचे दोन समान भाग करणारी रेषा ह्या दोन्ही रेषा
वाढविल्या असतां पायास मिळतात, तर त्या पायाचे आं-
तल्या अंगास व बाहेरल्या अंगास जे खंड पाडतात
ते दुसऱ्या दोन बाजूंचीं प्रमाणांत असतात.

४ सिद्धांत.

समकोण त्रिकोणांत समकोणा जवळच्या बा-
जू परस्पर प्रमाणांत असतात, आणि समकोणा सरो-
पील बाजू सजातीय असतात, म्हणजे प्रमाणांत अग्र-
सर किंवा उपाग्रसर असतात.

अबक आणि डकई असे दोन समकोण
त्रिकोण आहेत. अब
क त्रिकोणाचा ब कोन
डकई त्रिकोणाच्या
क कोनाबरोबर आहे.



अकब कोन डईक कोनाबरोबर आहे, व ब
अक कोन कडई कोनाबरोबर आहे, त्यास ह्या
दोन त्रिकोणांच्या समकोनांजवळील बाजू प्रमाणांत
आहेत, व त्यां समोरील बाजू सजातीय आहेत, हें सि-
द्ध करावयाचें.

डकई त्रिकोण असा ठेव, कीं त्याची कई
बाजू बक बाजूस लागेल आणि त्या दोन्ही एका
रेषेंत येतील. (१ बु० १७ व्या सि० प्र०) अबक
आणि अकब हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां
पेक्षां कमी आहेत, ह्याकरितां अबक कोन आणि
अकब कोनाबरोबरचा कोन डईक हेही मिळू-
न दोन काटकोनांपेक्षां कमी आहेत, तेव्हां (१ बु० २९
व्या सि० कु० प्र०) बअ आणि ईड रेषा वाढ-
विल्या असतां त्या कोठेंतरी मिळतील, त्या फ स्थळीं
मिळतात असें मानू. अबक कोन डकई

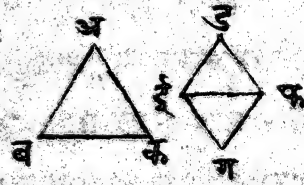
कोना बरोबर आहे, व अ क ब कोन ड ई क को-
 ना बरोबर आहे, ह्या करितां (१ बु० २० व्या सि०
 प्र०) ब फ वाजू क ड वाजूशीं समांतर आहे,
 व अ क वाजू फ ई वाजूशीं समांतर आहे,
 ह्या करितां अ क ड फ समांतर भुज चौकोन आ-
 हे. (१ बु० २४ व्या सि० प्र०) अ क, ड फ
 वाजू बरोबर आहे, व अ फ वाजू क ड वाजू
 बरोबर आहे. फ ब ई त्रिकोणाच्या फ ई वाजूशीं
 अ क रेघ समांतर आहे, ह्या करितां (६ बु० २
 व्या सि० प्र०) ब अ : अ फ :: ब क : क ई,
 पण अ फ क ड बरोबर आहे, ह्या करितां ब
 अ : क ड :: ब क : क ई. परावर्तनानें
 ब अ : ब क :: क ड : क ई, व फ रेघेशीं
 क ड रेघ समांतर आहे, ह्या करितां ब क :
 क ई :: फ ड : ड ई, पण फ ड, अ क
 बरोबर आहे, म्हणून ब क : क ई :: अ क :
 ड ई. परावर्तनानें ब क : अ क :: क ई : ड
 ई, आणि अ ब : ब क :: ड क : क ई असें
 तुकतेंच सिद्ध केले आहे, ह्या करितां अ ब : अ
 क :: ड क : ड ई हे उघड आहे.

५. सिद्धांत.

ज्या दोन त्रिकोणांच्या प्रत्येक कोनाजवळ
च्या बाजू परस्पर प्रमाणांत असतात ते दोन त्रिको-
ण समकोण असतात, आणि त्यांचे समकोन सजा-
तीय बाजूंच्या समोर असतात.

अबक आणि डईफ ह्या दोन त्रिको-
णांच्या प्रत्येक कोना

जवळच्या बाजू प्र-
माणांत आहेत, त्या
अशा कीं अबः



बकः :: डईः इफ, बकः कअः :: ई
फः फड, आणि बअः अकः :: ईडः
डफ, त्यास अबक आणि डईफ हे दोन
त्रिकोण समकोण आहेत, आणि त्यांच्या सजातीय
बाजू समोर समान कोन आहेत, हे सिद्ध करावयाचे

(१ बु० २३ व्या सि० प्र०) ईफ रेघेत ई बिं-
दूजवळ अबक कोनाबरोबर असा एक फई
ग कोन कर, तसेंच फ बिंदूजवळ बकअ
कोना एवढा ईफग कोन कर. (१ बु० २२ व्या

सि० प्र०) ब अ क कोन ई ग फ कोना बरोबर
 आहे, ह्या करितां अ ब क आणि ग ई फ हे दोन
 त्रिकोण समकोण आहेत, आणि म्हणून (६ बु० ४
 थ्या सि० प्र०) त्या त्रिकोणांच्या समकोनां समोरील
 बाजू परस्पर प्रमाणांत आहेत, ह्या करितां अ बः
 ब क :: ग ई : ई फ, आणि अ बः ब क ::
 ड ई : ई फ असें गृहीत आहे, ह्या करितां (५ बु०
 ४ थ्या सि० प्र०) ड ई : ई फ :: ग ई : ई फ.
 आतां ड ई आणि ग ई ह्या दोन रेषांचे ई फ शी
 गुणोत्तर सम आहे, ह्या करितां (५ बु० ३ व्या सि०
 प्र०) ड ई आणि ग ई परस्पर बरोबर आहेत.
 ह्या प्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल, कीं ड फ बाजू
 फ ग बाजू बरोबर आहे. ड ई फ आणि ई फ
 ग ह्या दोन त्रिकोणांत ड ड बाजू ई ग बाजू बरो-
 वर आहे, ड फ, फ ग बरोबर आहे, आणि ई फ
 बाजू दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे, ह्या करितां
 (१ बु० ८ व्या सि० प्र०) ड ई फ कोन ग ई फ कोना बरोबर
 आहे, ड फ ई कोन ग फ ई कोना बरोबर आहे, व ई ड फ
 कोन ई ग फ कोना बरोबर आहे. ड ई फ कोन ग
 ई फ कोना बरोबर आहे, आणि ग ई फ कोन अ ब क

कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां **अ ब क** कोन **ड ई**
फ कोनाबरोबर आहे, आणि ह्याच कारणास्तव
अ क व कोन **ड फ ई** कोनाबरोबर आहे, व **अ**
 कोन **ड** कोनाबरोबर आहे, म्हणून **अ ब क**
 त्रिकोण **ड ई फ** त्रिकोणाशीं समकोण आहे, हें
 सिद्ध.

६ सिद्धांत.

ज्या दोन त्रिकोणांत एकाचा एक कोन दुस-
 र्याच्या एका कोनाबरोबर असतो, आणि समकोनां
 जवळच्या बाजू परस्पर प्रमाणांत असतात, ते दोन
 त्रिकोण समकोण असतात, आणि त्यांचे समकोन
 सजातीय बाजूं समोर असतात.

अ ब क आणि **ड ई फ** असे दोन त्रि-
 कोण आहेत. **अ ब**
क त्रिकोणाचा **अ** को
 न **ड ई फ** त्रिकोणा
 च्या **ड** कोनाबरोबर
 आहे, आणि **अ** आणि **ड** ह्या समान कोनांज-
 वळच्या बाजू प्रमाणांत आहेत, म्हणजे **ब अ**:



अकः॥ ईडः डफ, त्यास अबक आ -
णि ड ईफ हे दोन त्रिकोण समकोण आहेत, आ -
णि अबक त्रिकोणाचा ब कोन ड ईफ त्रि -
कोणाच्या ई कोनाबरोबर आहे, व क कोन फ
कोनाबरोबर आहे, हे सिद्ध करावयाचे.

(१ बु० २३ व्या सि० प्र०) डफ रेघेत
ड बिंदूजवळ ब अक किंवा ईडफ कोना -
बरोबर फडग कोन कर, व फ बिंदूजवळ
ब क अ कोनाबरोबर डफग कोन कर. (१
बु० ३२ व्या सि० प्र०) अबक त्रिकोणाचा
बाकी राहिलेला ब कोन फडग त्रिकोणाच्या
बाकी राहिलेल्या ग कोनाबरोबर आहे; म्हणून
अबक आणि डगफ हे दोन त्रिकोण सम -
कोण आहेत; आणि ह्या करितां (६ बु० ४ व्या सि०
प्र०) ब अः अकः॥ गडः डफ, आणि
ब अः अकः॥ ईडः डफ असें गृहीत
आहे, ह्या करितां (५ बु० ४ व्या सि० प्र०) ईडः
डफः॥ गडः डफ आतां ईड आणि ग
ड ह्या दोन बाजूंचे डफ रेघेरीं गुणोत्तर समान
आहे, ह्या करितां (५ बु० ३ व्या सि० प्र०) ईड

बाजू गड बाजूबरोबर आहे. डईफ आणि ग
 डफ ह्या दोन त्रिकोणांत डईड बाजू गड बाजूब
 रोबर आहे व डफ रोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे,
 व डईडफ कोन गडफ कोनाबरोबर आहे, ह्या क-
 रितां (१ बु० ४ व्या सि० प्र०) डफई कोन डफग
 कोनाबरोबर आहे व ई कोन ग कोनाबरोबर आहे,
 परंतु डफग कोन अकब कोनाबरोबर आहे,
 ह्या करितां अकब कोन डफई कोनाबरोबर आ-
 हे, व बअक कोन डईडफ कोनाबरोबर आहे
 असें गृहीत आहे, ह्या करितां बाकीचा ब कोन बा-
 कीच्या ई कोनाबरोबर आहे, ह्या करितां अबक
 त्रिकोण डईफ त्रिकोणाशीं समकोण आहे, हे
 सिद्ध.

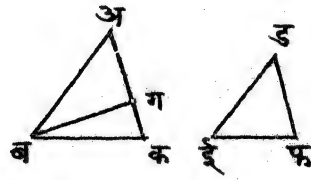
७ सिद्धांत.

जर दोन त्रिकोणांत एकाचा एक कोन दुस-
 र्याच्या एका कोनाबरोबर असला व एका त्रिकोणा-
 चा दुसऱ्या कोनाजवळच्या बाजू दुसऱ्या त्रिकोणा-
 च्या दुसऱ्या कोनाजवळच्या बाजूशीं प्रमाणांत अ-
 सल्या व एकाचा राहिलेला तिसरा कोन व दुसऱ्या

त्रिकोणाच्या राहिलेला विसरा कोन ह्यांपैकीं प्रत्येक कोन काढकोनाहून कमी असला किंवा नसला, तर ते दोन त्रिकोण समकोण असतात, व ज्या कोनांजवळच्या बाजू प्रमाणांत आहेत ते कोन परस्परबरोबर असतात.

अबक आणि डईफ ह्या दोन त्रिकोणांत अबक त्रिकोणाचा अ कोन डईफ त्रिकोणाच्या ड कोना

बरोबर आहे, अबक कोना जवळच्या अब आणि बक ह्या



बाजू डईफ कोनाजवळच्या डई आणि ईफ ह्या बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत, व बाकी राहिलेल्या क आणि फ कोनांपैकीं प्रत्येक कोन काढकोनापेक्षां लहान आहे, असें प्रथमतः मानूं, त्यास अबक आणि डईफ हे दोन त्रिकोण समकोण आहेत, म्हणजे अबक कोन डईफ कोनाबरोबर आहे, व अकब कोन डफई कोनाबरोबर आहे, हे सिद्ध करावयाचे.

अबक आणि डईफ हे दोन कोन

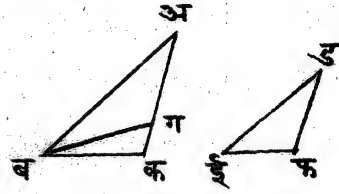
परस्पर बरोबर नाहीत असें म्हटल्यास त्यांपैकीं एक दुसऱ्यापेक्षां मोठा आहे, असें मानलें पाहिजे, त्यास **अबक** कोन **डईफ** कोनापेक्षां मोठा आहे, असें मानूं.

(१ बु० २३ व्या सि० प्र०) अब रेघेंत ब बिंदूजवळ **डईफ** कोना एवढा **अबग** कोन कर. **अ** कोन **ड** कोनाबरोबर आहे, व **अबग** कोन **डईफ** कोनाबरोबर केला आहे, ह्या करितां (१ बु० ३२ व्या सि० प्र०) बाकी राहिलेला **अग** ब कोन बाकीच्या **डफई** कोनाबरोबर आहे, ह्या करितां **अबग** आणि **डईफ** हे दोन त्रिकोण समकोण आहेत, म्हणून (६ बु० ४ व्या सि० प्र०) **अबः बगः :: डईः ईफ**, परंतु **अबः बकः :: डईः ईफ** असें गृहीत आहे, ह्या करितां (५ बु० ४ व्या सि० प्र०) **अबः बकः :: अबः बग**, आतां **बक** आणि **बग** ह्या दोन बाजूंचें **अक** रेघेशीं युगोत्तर समान आहे, ह्या करितां (५ बु० ३ व्या सि० प्र०) **बक, बग** बरोबर आहे, ह्या करितां (१ बु० ६ व्या सि० प्र०) **बगक** कोन **बकग** कोनाबरोबर

आहे; ब क ग कोन काटकोनापेक्षां लहान आहे,
 असें गृहीत आहे, ह्या करितां ब ग क कोनही
 काटकोनापेक्षां लहान आहे; म्हणून (१ बु० १३ व्या
 सि० प्र०) अ ग ब कोन काटकोनापेक्षां मोठा
 आहे. परंतु अ ग ब कोन फ कोनाबरोबर आहे,
 असें पूर्वी दर्शविलें आहे, ह्या करितां फ कोन, काट-
 कोनापेक्षां मोठा आहे, परंतु तो काटकोनापेक्षां लहान
 आहे असें गृहीत आहे, ह्या करितां एकच कोन काट-
 कोनापेक्षां मोठा आणि लहान होणें ही गोष्ट अवाक्य
 आहे, ह्या करितां अ ब क आणि ड ई फ हे कोन
 असमान नाहीत तर ते समान आहेत, अ कोन ड
 कोनाबरोबर आहे, ह्या करितां अ ब क त्रिकोणाच्या
 तिसरा क कोन ड ई फ त्रिकोणाच्या तिसऱ्या
 फ कोनाबरोबर आहे, ह्या करितां अ ब क त्रिकोण
 ड ई फ त्रिकोणाशीं समकोण आहे, हे सिद्ध.

आतां क आणि फ ह्या दोन कोनांपैकीं
 प्रत्येक कोन काटकोनापेक्षां लहान नाही असें मातृ-
 आकृति पहिल्या प्रकारांत केली आहे, त्या प्रमा-
 णेंच करून ही गोष्ट सिद्ध करतां येईल, कीं ब क
 बाजू ब ग बाजूबरोबर आहे, आणि क कोन ब

ग क कोनाबरोबर आहे. क कोन काटकोनापेक्षां कमी नाही, ह्या करितां ब ग क कोनही काटकोनापेक्षां कमी नाही, तेव्हां ब ग क त्रिकोणाचे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांपेक्षां कमी नाहीत, त्यास असें होणें (१ बु० १७ व्या सि०

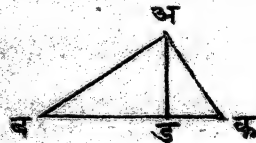


प्र०) अवश्य आहे, ह्या करितां पहिल्या प्रकारांत सिद्ध केले आहे, त्या प्रमाणेच सिद्ध होईल, कीं अब क त्रिकोण ड ई फ त्रिकोणाशीं समकोण आहे.

८ सिद्धांत.

काटकोन त्रिकोणांत काटकोनापासून कर्ण वर लंब केला असता त्याच्या दोहों आंगांस जे दोन काटकोन त्रिकोण पडतात ते सगळ्या त्रिकोणाशीं सरूप असतात, व परस्परंशीं सरूप असतात.

अब क एक काटकोन त्रिकोण आहे. त्याच्या ब अ क काटकोनापासून ब क कर्ण



रेघेवर अडु लंब केला आहे, त्यास अडु लंबाचे दोहों बाजूंस जे अबड व अकड असे दोन काटकोन त्रिकोण पडले आहेत ते अबक त्रिकोणाशीं सरूप आहेत, व परस्परांशीं सरूप आहेत, हे सिद्ध करावयाचे.

अबक आणि अबड ह्या दोन त्रिकोणांत ब अक कोन अडुब कोनाबरोबर आहे, कारण ते दोन्ही कोन काटकोन आहेत, अबक कोन दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे, ह्या करितां (१ बु० ३२ व्या सि० प्र०) बाकीचा अकब कोन बाकीच्या ब अडु कोनाबरोबर आहे, म्हणून अबक आणि अबड हे दोन त्रिकोण समकोण आहेत. ते समकोण आहेत, ह्या करितां (६ बु० ४ व्या सि० प्र०) त्यांच्या समकोनांजवळच्या बाजू प्रमाणांत आहेत, म्हणून (६ बु० ६ व्या सि० प्र०) ते दोन त्रिकोण सरूप आहेत. अडुक त्रिकोण अबक त्रिकोणाशीं समकोण आहे व सरूप आहे, हे ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होतें. अबड आणि अकड हे दोन त्रिकोण अबक त्रिकोणाशीं सरूप आहेत, ह्या करितां ते परस्परांशीं सरूप आहेत, हे सिद्ध.

कु० ह्यावरून ही गोष्ट उघड दिवून येते, कीं
 काटकोन त्रिकोणाच्या काटकोनापासून कर्णावर
 लंब केला असता त्याच्या योगानें कर्णाचे जे दोन
 खंड पडतात त्यांचे मध्यप्रमाणलंब आहे, व दु-
 सऱ्या दोन बाजू पैकीं प्रत्येक बाजू कर्ण व त्या बा-
 जू कडील कर्णाचा भाग ह्यांचें मध्यप्रमाण आहे,
 कारण अबड आणि अडक हे दोन त्रिकोण
 सरूप आहेत, ह्या करितां (६ बु० ४ थ्या सि० प्र०)
 बडः डअः :: डअः डक. अबक
 आणि अबड हे त्रिकोण सरूप आहेत, ह्या लव
 बकः बअः :: बअः बड. अबक
 आणि अकड हे त्रिकोण सरूप आहेत, ह्या क-
 रितां बकः कअः :: कअः कड.

९ सिद्धांत. कृत्य.

कोणत्याही सरळ रेषेचा असा तुकडा पाडा-
 वयाचा आहे, कीं ती रेषा त्या तुकड्याच्या विवक्षित
 पट होईल.

अब एक सरळ रेषा आहे, तिचा एक अ-
 सा तुकडा पाडावयाचा आहे, कीं ती रेषा त्या तुक-

ड्याच्या विवक्षित पट होईल.

अब रेघेची कोणता तरी कोन करणा -

री अशी एक अमर्याद

अक रेघ अ बिंदू

पासून काढ, आणि त्या

रेघेत ड बिंदू घेऊन



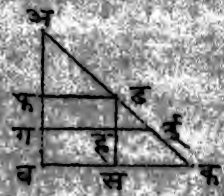
अक चा अड च्या विवक्षित पट असा अस
तुकडा पाड, आणि व, स सांध, व ब स ची
ड ई रेघ समांतर कर.

अ व स त्रिकोणाच्या ब स बाजूची ई ड
रेघ समांतर आहे, ह्या करितां (६ बु० २ च्या सि०
प्र०) स ड : ड अ :: ब ई : ई अ. (५ बु०
७ च्या सि० प्र०), मिश्रणानें स अ : ड अ ::
ब अ : ई अ. ह्यावरून स्पष्ट आहे, कीं स अ,
ड अ च्या जिनक्या पट आहे, तिनक्या पट ब अ,
ई अ च्या आहे. परंतु स अ रेघ ड अ च्या वि-
वक्षित पट आहे, ह्या करितां अब रेघ ई अ च्या
विवक्षित पट आहे, हें उघड आहे, ह्या करितां अ ई
हा अब चा पाहिजे असा तुकडा पडला असे.

१० सिद्धांत.कृत्य.

कोणत्याही दोन रेषांपैकी एक रेष छिन्न आ
ल्यास छिन्न रेषेच्या भागांशी सरूप असे दुसऱ्या
रेषेचे भाग पाडावयाचे, म्हणजे दुसऱ्या रेषेचे अ
भाग पाडावयाचे की त्या भागांतील गुणोत्तरें आणि
छिन्न रेषेच्या भागांतील गुणोत्तरेंही सारखीं हो
तील.

अ व आणि अ क अशा दोन रेषा आहेत, त
पैकी अ क रेष छिन्न
आहे, त्यास अ क रेषे
च्या भागांशी सरूप असे
अ व रेषेचे भाग पाडा
वयाचे.



अ क रेषेचे ड आणि ई ह्या स्थळीं भाग के
ले आहेत. अ व आणि अ क ह्या दोन रेषा त्यांच
मध्ये कोणता तरी कोन होईल अशा ठेव, आणि
क सांध. (१ बु० ३१ व्या सि० प्र०) ब क रेषेचा
ड आणि ई ह्या दोन बिंदूंतून ड फ आणि ई ग
अशा दोन रेषा समांतर कर, आणि ड बिंदूंतून

अबरीं उ ह स रे घ समांतर कर. फ ह आ-
 नि ह ब ह्या आकृति समांतर भुज चौकोन आ-
 हेत, ह्याकरितां (१ बु. २४ व्या सि. प्र.) उ ह
 रे घ फ ग बरोबर आहे, व ह स रे घ ग ब
 रे घेबरोबर आहे. उ सक त्रिकोणाच्या सक
 बाजूचीं ह ई रे घ समांतर आहे, ह्याकरितां (२ बु.
 २ व्या सि. प्र.) क ई: ई ड:: स ह: ह ड,
 पण स ह, ब ग बरोबर आहे, आणि ह ड, ग फ
 बरोबर आहे, ह्याकरितां क ई: ई ड:: ब ग:
 ग फ, अ ग ई त्रिकोणाच्या ग ई बाजूचीं
 फ ड बाजू समांतर आहे, ह्याकरितां ई ड: ड
 अ:: ग फ: फ अ. क ई: ई ड:: ब ग:
 ग फ, आणि ई ड: ड अ:: ग फ: फ अ
 असें सिद्ध झालें, ह्याकरितां अक रे घेच्या भागां-
 चीं सरूप असे अब रे घेचे भाग केले असत.

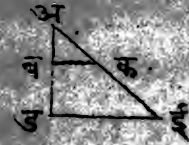
११ सिद्धांत कृत्य.

त्रिप्रमाणांतील पहिल्या दोन रेषा कळल्या
 असतां तोंबटची तिसरी रेषा काढावयाची.

अब आणि अक ह्या दोन रेषा त्रिप्रमा-

णांतील आहेत, त्यास शेवटची तिसरी रेषा काढा-
वयाची.

अब आणि अक ह्या रेषा त्यांच्यामध्ये
कोन होईल अशा ठेव,
आणि त्या रेषा वाढीव.
नंतर बड, अक
बरोबर कर, आणि ब,



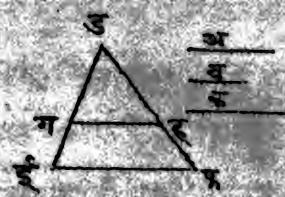
क सांधून बक रेषेची डई रेष (१ बु० २१
व्या सि० प्र०) समांतर कर. अडई त्रिकोणा-
च्या डई बाजूची बक रेष समांतर आहे, ह्या करि-
तां (६ बु० २ व्या सि० प्र०) अबः बडः:
अकः कई. बड, अक बरोबर आहे, ह्या
करितां अबः अकः अकः कई म्हणून
ज्या त्रिप्रमाणांत अब आणि अक बाजू आहे
त, त्यांतील तृतीयपद कई बाजू काढली असे.

१२ सिद्धांत. कृत.

चतुः प्रमाणांतील पहिल्या तीन रेषा कळ -
ल्या असता चौथी रेषा काढावयाची.

आहेत, त्यास चौथी रेषा
काढायची.

ज्यांच्या मध्ये कोन



होईल अशा ड ई

आणि ड फ. दोन रेषा काढ, आणि अ रेषेबरो-
बर ड ग रेष कर, ब रेषेबरोबर ग ई रेष कर,
आणि क रेषेबरोबर ड ह रेष कर, आणि ग,
ह सांध. नंतर (१ बु० ३१ व्या सि० प्र०) ई बि-
ंदूतून गहशीं ई फ रेष समांतर कर. ड ई फ
त्रिकोणाच्या ई फ बाजूशीं ग ह बाजू समांतर आ-
हे, ह्या करितां (६ बु० २ व्या सि० प्र०) ड ग:
ग ई :: ड ह : ह फ. ड ग, अ रेषेबरोबर
र आहे, ग ई, ब बरोबर आहे, ब ड ह, क
बरोबर आहे, ह्या करितां अ : ब :: क : ह
फ, ह्या करितां ज्या चतुः प्रमाणांत अ, ब, क
ह्या तीन रेषा तीन पदे आहेत, त्यांतील चौथें पद
ह फ रेषा काढली असे.



१३ सिद्धान्तकृत्य.

त्रि प्रमाणांतील पहिली रेषा आणि शेवटची रेषा कळली असता मध्यरेषा काढावयाची.

त्रि प्रमाणांतील पहिली आणि शेवटची अशा अव आणि ब क ह्या दोन रेषा आहेत, त्यास मध्यरेषा काढावयाची.

एका सरळ रेषेत अव आणि ब क ह्या रेषा एकाशी एक लागून ठेव. अक संयुक्तरेषेवर अडक अर्धवर्तु-

ळ काढ, आणि (१ बु०

११ व्या सि० प्र०) अ



क वर ब बिंदून ब

ड रेषा लंब कर. अ, ड आणि क, ड बिंदु सांध.

(३ बु० ३१ व्या सि० प्र०) अडक कोन काढ-

कोन आहे. अडक काढकोन त्रिकोणांत अड

क काढकोनापासून अक कर्णावर ड ब लंब

केला आहे, ह्या करितां (६ बु० ८ व्या सि० कु० प्र०)

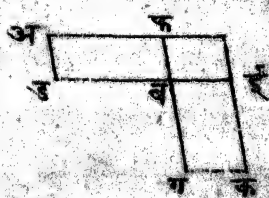
अक पायाच्या अव आणि बक खंडांचे बड

मध्यप्रमाण आहे, ह्या करितां अव आणि बक ह्या

दोन रेषांचे मध्यपद काढलें असे.

ज्या दोन समान समांतरभुज चौकोनांत एकाचा एक कोन दुसऱ्याच्या एका कोनाबरोबर असतो त्या समांतरभुज चौकोनांच्या समकोनाजवळच्या बाजू व्यतिक्रमाने प्रमाणांत असतात, व ज्या दोन समांतरभुज चौकोनांत एकाचा एक कोन दुसऱ्याच्या एका कोनाबरोबर असतो व त्या समकोनाजवळच्या बाजू व्यतिक्रमाने प्रमाणांत असतात ते समांतरभुज चौकोन परस्पर समान असतात.

अब आणि बक दोन समान समांतरभुज चौकोन आहेत, व त्यांचे व विंदूजवळचे कोन समान आहेत. दुब आणि बई ह्या दोन बाजू जोडून एका सरळ रेषेत ठेव. फुब आणि वग ह्या दोन रेषा एका सरळ रेषेत येतील, हें (१ बु० १४ व्या सि० प्र०) उघड आहे, त्यास अब आणि बक ह्या दोन समांतरभुज चौको-



नांच्या समान कोनांच्या आंगच्या बाजू व्यतिक्रमाने
प्रमाणांत आहेत, म्हणजे डबः बईः :: गबः ब
फ, हे सिद्ध करावयाचे.

ई फ समान्तर भुज चौकोन पुरा कर अब
आणि ब क समान्तर भुज चौकोन आहेत, आणि
फ ई एक समान्तर भुज चौकोन आहे, त्या करितां
अबः फ ई :: ब कः फ ई हे स्पष्ट आहे. (६
बु० १ ल्या सि० प्र०) अबः फ ई :: डबः
बई व ब कः फ ई :: गबः ब फ, म्हणून
(९ बु० ४ व्या सि० प्र०) डबः बई :: गबः
ब फ, तेव्हां अब आणि ब क समान समान्तर
भुज चौकोनांच्या समान कोनांजवळच्या बाजू व्यति-
क्रमाने प्रमाणांत आहेत, हे सिद्ध.

अब आणि ब क समान्तर भुज चौकोनांच्या
समान कोनांजवळच्या बाजू व्यतिक्रमाने प्रमाणांत
आहेत, म्हणजे डबः बई :: गबः ब फ, यास
ने समान आहेत, हे सिद्ध करावयाचे.

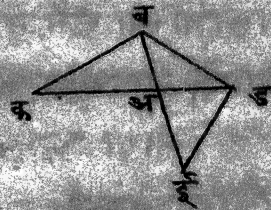
(६ बु० १ ल्या सि० प्र०) डबः बई ::
अबः फ ई व गबः ब फ :: ब कः फ ई.
डबः बई :: गबः ब फ असे गृहीत आहे.

ह्याकरितां अबः फईः बकः फई ह्या
करितां (५ बु० ३ व्या सि० प्र०) अब समां-
तरभुजचौकोन बक समांतरभुजचौकोनाबरो-
बर आहे, हे सिद्ध.

१५ सिद्धांत.

ज्या दोन समान त्रिकोणांत एकाचा एक
कोन दुसऱ्याच्या एका कोनाबरोबर असतो
त्या त्रिकोणांच्या समकोनांजकच्या बाजू व्यति-
माने प्रमाणांत असतात. ज्या दोन त्रिकोणांत ए-
काचा एक कोन दुसऱ्याच्या एका कोनाबरोबर अ-
सतो आणि त्या समकोनांजकच्या बाजू व्यति-
क्रमाने प्रमाणांत असतात ते दोन त्रिकोण समान
असतात.

अबक आणि अडई दोन समान त्रि-
कोण आहेत, आणि ब
अक कोन डअई
कोनाबरोबर आहे, त्यास
ह्या समान कोनांजक -
च्या बाजू व्यतिक्रमाने प्रमाणांत आहेत, म्हणजे



कअः अडः :: ईअः अब, हे सिद्धकराव-
याने.

अबक आणि अडई हे दोन त्रिकोण
एकाशीं एक असे लावून ठेव, कीं कअ आणि अ
ड ह्या दोन बाजू एका सरळ रेषेत येतील. आतां
अब आणि अई ह्या दोन बाजू एका सरळ रे-
षेत आहेत, हे (१ बु० १४ व्या सि० प्र०) स्पष्ट
आहे. ब, ड सांध. अबक त्रिकोण अडई
त्रिकोणाबरोबर आहे, व अबड एक त्रिकोण आ-
हे, ह्या करितां अबकः अबडः :: अडईः
अबडः पण (६ बु० १ व्या सि० प्र०) अब
कः अबडः कअः अड आणि अड
ईः अबडः :: अईः अब ह्या करितां (९ बु०
४ व्या सि० प्र०) कअः अडः :: अईः अ
ब, म्हणून अबक आणि अडई ह्या दोन
त्रिकोणांच्या समानकोनांज वळच्या बाजू व्यति-
क्रमानें प्रमाणांत आहेत, हे सिद्ध.

आतां अबक आणि अडई ह्या दोन
त्रिकोणांच्या समकोनांज वळच्या बाजू व्यतिक्रमा-
नें प्रमाणांत आहेत, म्हणजे कअः अडः ::

अईः अब. त्यास अबक त्रिकोण व अ
डई त्रिकोण हे समान आहेत, हे सिद्ध करावया-
चे.

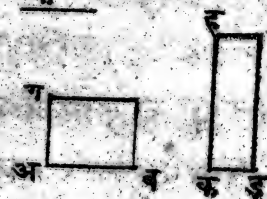
बड सांध. (६ बु. १ व्या सि. प्र०) क
अः अडः:: अबकः अडब आणि
अईः अबः:: अडईः अडब. कअः
अडः:: अईः अब असें गृहीत आहे, सा
करितां (५ बु. ४ व्या सि. प्र०) अबकः अ
बडः:: अडईः अबड, म्हणजे अबक
आणि अडई हे दोन त्रिकोण अबड त्रि-
कोणाशीं समगुणोत्तरांत आहेत, म्हणून (५ बु. ३
व्या सि. प्र०) अबक त्रिकोण अडई त्रि-
कोणाबरोबर आहे, हे सिद्ध.

१६ सिद्धांत प्रमेय.

चार रेषा प्रमाणांत असल्यास आद्यंतरेषां-
चा काटकोन चौकोन मध्यरेषांच्या काटकोन चौ-
कोनाबरोबर असतो. आद्यंतरेषांचा काटकोन
चौकोन मध्यरेषांच्या काटकोन चौकोनाबरोबर
असल्यास त्या चार रेषा प्रमाणांत असतात.

अब, कड, ई आणि फ ह्या चार रेषा प्रमाणांत आहेत, म्हणजे अबः कडः:: ईः फः, त्यास अब आणि फ ह्या दोन रेषांचा काट-कोन चौकोन कड आणि ई ह्या दोन रेषांच्या काटकोन चौकोनाबरोबर आहे, हे सिद्ध करावयाचे.

(१ बु० ११ व्या सि० प्र०) अबिंदून अबरेषेवर अग लंब कर, आणि अग, फ रेषेबरोबर कर, तसें $\frac{ई}{कड}$ चकड रेषेवर क बिंदून क ह लंब कर, आणि क ह ई बरोबर कर. गब आणि हड समांतर भुजचौकोन पुरे कर.



अबः कडः:: ईः फ असें गृहीत आहे, व ई रेष क ह रेषेबरोबर आहे, व फ रेष अग रेषेबरोबर आहे, त्याकरितां अबः कडः:: क हः अगः, तेव्हां गब आणि हड ह्या दोन समांतर भुजचौकोनांच्या समानकोनांजवळच्या बाजू व्यतिक्रमाने प्रमाणांत आहेत, आणि त्याकरितां (६ बु० १४ व्या सि० प्र०) ते समान आहेत.

ग ब काटकोन चौकोन अब आणि फ ह्या दोन
 रेखांनीं झाला आहे, कारण अ ग आणि फ बरो-
 बर आहेत, व ह ड काटकोन चौकोन क ड आणि
 ई ह्या दोन रेखांनीं झाला आहे, कारण क ह, ई
 बरोबर आहे, याकरितां अब आणि फ ह्या दो-
 न रेखांचा काटकोन चौकोन क ड आणि ई ह्या
 दोन रेखांचा काटकोन चौकोन बरोबर आहे, हे
 सिद्ध.

अब आणि फ ह्या दोन रेखांचा काटकोन
 चौकोन क ड आणि ई ह्या दोन रेखांच्या काटको-
 न चौकोन बरोबर आहे, त्यास त्या रेखा प्रमाणांत आहेत,
 म्हणजे अबः क डः : ई. फ, हे सिद्ध क-
 रावयाचे.

पूर्वी प्रमाणेंच आकृति केली आहे. अब
 आणि फ ह्या दोन रेखांचा काटकोन चौकोन क ड
 आणि ई ह्या दोन रेखांच्या काटकोन चौकोन बरो-
 बर आहे, असें गृहीत आहे, व ग ब समांतर भुज
 चौकोन अब आणि फ ह्या दोन रेखांनीं झाला
 आहे, कारण अ ग, फ बरोबर आहे, व ह ड
 समांतर भुज चौकोन क ड आणि ई ह्या दोन

रेषांनीं झाला आहे, कारण कह, ई बरोबर आहे,
 ह्या करितां गब समांतरभुजचौकोन हडु समांतर
 भुजचौकोना बरोबर आहे. ते समांतरभुजचौकोन
 समकोण आहेत, ह्या करितां (६ बु. १४ व्या सि.
 प्र. ०) त्यांच्या समकोनांजवळच्या बाजू व्यतिक्रमार्थे
 प्रमाणांत आहेत, म्हणजे अबः कडः:: कहः
 अगः कह, ई बरोबर आहे, व अगः, फ
 बरोबर आहे, ह्या करितां अबः कडः:: ईः
 फः, हे सिद्ध.

१७ सिद्धांत. प्रमेय.

तीन रेषा प्रमाणांत असल्यास आद्यंत रेषांचा
 काटकोनचौकोन मध्यरेषेच्या वर्गाबरोबर असतो.
 ज्या तीन रेषांत आद्यंतरेषांचा काटकोनचौकोनम-
 ध्यरेषेच्या वर्गाबरोबर असतो, त्या तीन रेषा परस्पर प्रमा-
 णांत असतात.

अब आणि क ह्या तीन रेषा प्रमाणांत आ-
 हेत, म्हणजे अः बः:: अ —
 बः क, त्यास अ आ —
 णि क ह्यांचा काटकोन क —

चौकोन ब व्यावर्गाबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

ब रेघेबरोबर ड एक रेघ काढ. अ: ब::

ब: क असें गृहीत आहे, व ड, ब बरोबर आहे, ह्याकरितां अ: ब:: ड: क, पण चार रेखा प्रमाणांत असल्यास आद्यंत रेखांचा काढकोन चौकोन मध्यरेखांच्या काढकोन चौकोनाबरोबर असतो, असें ६ बु० १६ व्या सिद्धांतांत सिद्ध केलें आहे, ह्याकरितां अ × क = ब × ड, पण ड, ब बरोबर आहे, ह्याकरितां अ × क = ब, म्हणजे अ आणि क ह्यांचा काढकोन चौकोन ब चे वर्गाबरोबर आहे, हें सिद्ध.

अ आणि क ह्या दोन रेखांचा काढकोन चौकोन ब व्यावर्गाबरोबर आहे, त्यास अ, ब आणि क ह्या तीन रेखा प्रमाणांत आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

पूर्वी प्रमाणेंच ड रेघ ब रेघेबरोबर कर.

अ आणि क ह्यांचा काढकोन चौकोन ब चे वर्गाबरोबर आहे असें गृहीत आहे, व ब, ड बरोबर आहे, म्हणून ब आणि ड ह्यांचा काढकोन चौकोन ब चे वर्गाबरोबर आहे, ह्याकरितां अ आणि

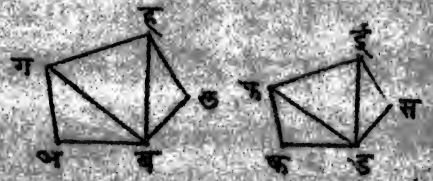
कं ह्या दोन रेखांचा काटकोन चौकोन ब आणिटु
ह्या दोन रेखांच्या काटकोन चौकोनाबरोबर आहे. परंतु
ज्या चार रेखांत आद्यंतांचा गुणाकार मध्यरेखांचे गुणा
काराबरोबर असतो, त्या चार रेषा परस्पर प्रमाणांत
असतात, ह्या करितां अः बः :: डः क, ब, ड
बरोबर आहे, ह्या करितां अः बः :: बः क, हें
सिद्ध.

१८ सिद्धांत. कृत्य.

विवक्षित सरलरेषा कृतीर्णां सरूप व ती प्र-
माणें स्थित अशी एक सरलरेषा कृति विवक्षित रेषे-
वर काढावयाची.

अब विवक्षित रेषेवर क ड ई फ विव-
क्षित चौकोनाशीं

सरूप व त्याप्रमाणें
स्थित असा एक चौ-
कोन काढावयाचा.



ड, फ सांध. (१ बु. २२ व्या सि. प्र०)

अब रेषेंत अ बिंदूजवळ क कोना एवढा ब
अ ग कोन कर, व ब बिंदूजवळ क ड फ कोना

एवदा अबग कोन कर. आतां (१ बु० ३२ व्या सि० प्र०) कफड त्रिकोणाच्चा तिसरा कोन कफड हा अगब त्रिकोणाच्या तिसऱ्या अगब कोनाबरोबर आहे, ह्या करितां कफड त्रिकोणअबग त्रिकोणाशीं समकोण आहे.

(१ बु० ३३ व्या सि० प्र०) बग रेघेंत ग बिंदूजवळ बगह कोन डफई कोनाबरोबर कर, व ब बिंदूजवळ गबह कोन फडई कोनाबरोबर कर. (१ बु० ३२ व्या सि० प्र०) तिसरा फडई कोन तिसऱ्या गहब कोनाबरोबर आहे, ह्या करितां फडई त्रिकोण गबह त्रिकोणाशीं समकोण आहे. अगब कोन कफड कोनाबरोबर आहे. व बगह कोन डफई कोनाबरोबर आहे, ह्या करितां सगळा अगह कोन सगळ्या कफई कोनाबरोबर आहे, व ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं सगळा अबह कोन सगळ्या कडई कोनाबरोबर आहे, अ कोन क कोनाबरोबर आहे, व ह कोन ई कोनाबरोबर आहे, ह्या करितां अबह ग चौकोन कडईफ चौकोनाशीं समकोण आहे. गअ ब आणि फ

कंड हे दोन त्रिकोण समकोण आहेत, ह्या करितां
 (६ बु० ४ व्या सि० प्र०) अगः गबः क
 फः फड. ब ग ह आणि ड फ ई हे दोन त्रि-
 कोण समकोण आहेत, ह्या करितां ब गः ग हः
 ड फः फ ई. अगः ग बः क फः फ ड
 व ब गः ग हः ड फः फ ई असें आहे, ह्या
 करितां (९ बु० ११ व्या सि० प्र०) अगः ग हः
 क फः फ ई. ६ व्या बुकाच्या चवथ्या सिद्धांतानें
 ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होते, कीं अबः ब हः क
 डः ड ई व ग हः ह बः फ ईः ई ड.
 अब ह ग आणि क ड ई फ हे चौकोण सम-
 कोण आहेत, असें मागे सिद्ध केलें आहे व आतां
 त्यांच्या समकोनांजवळच्या बाजू प्रमाणांत आहेत,
 असें सिद्ध केलें, ह्या करितां (६ बु० ६ व्या सि० प्र०)
 ते सरूप आहेत, हें सिद्ध.

आतां, कड स ई फ पंचकोणाकृतीचीं
 सरूप व तीसारखी स्थित अशी एक पंचकोणाकृति
 अब रेघेवर काढावयाची.

ड, ई सांध. वर सांगितल्या प्रमाणें अब
 रेघेवर कड ई फ चौकोनाचीं सजातीय वसा

प्रमाणे स्थित असा अबहग चौकोन काढ. बह
 र्हेचेंत ब. बिंदूजवळ ई ड स कोनाशीं समान हब
 ल कोन कर, आणि ह बिंदूजवळ ड ई स कोनाशीं
 समान ब ह ल कोन कर. (१ बु० ३२ व्या सि०
 प्र०) ड ई स त्रिकोणाचा स कोन बहल त्रि-
 कोणाच्या ल कोनाबरोबर आहे. अबहग आ-
 णि कड ई फ ह्या आकृति सजातीय आहेत, ह्या
 करितां ग ह ब कोन फ ई ड कोनाबरोबर
 आहे. बहल कोन ड ई स कोनाबरोबर आहे,
 ह्या करितां सगळा ग ह ल कोन सगळ्या फ ई स
 कोनाबरोबर आहे, व ह्या प्रमाणेंच अ ब ल कोन
 कड स कोनाबरोबर आहे, म्हणून अबलहग
 आणि कड स ई फ ह्या दोन पंचकोणाकृति सम-
 कोण आहेत. अबहग आणि कड ई फ ह्या दोन
 आकृति सजातीय आहेत, ह्या करितां गहः हबः
 फईः ईड व बहल आणि डईस हे
 दोन त्रिकोण समकोण आहेत, ह्या करितां (६ बु०
 ४ व्या सि० प्र०) बहः हलः :: डईः ईस,
 ह्या करितां (५ बु० ११ व्या सि० प्र०) गहः
 हलः :: फईः ईस व ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होतें,
 कीं अबः बलः :: कडः डस. हब

ल आणि डू ड स हे दोन त्रिकोण समकोण आहे-
न, त्या करितां हलः लबः:: ईसः सड. अ
बल ह ग आणि क ड स ई फ त्या दोन आकृ-
ति समकोण आहेत असें पूर्वी सिद्ध केले आहे, आ-
णि त्यांच्या बाजू प्रमाणांत आहेत असें आतां सि-
द्ध केले, त्या करितां त्या दोन पंचकोणाकृति सरूप
आहेत, हे सिद्ध.

१९ सिद्धांत. प्रमेय.

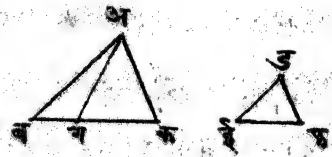
जे त्रिकोण सरूप असतात ते आपल्या स-
जातीय बाजूंच्या गुणोत्तराच्या वर्गांमध्ये प्रमाणांत
असतात.

अ ब क आणि डू ई फ हे दोन त्रिकोण
सरूप आहेत. अ ब

क त्रिकोणाचा ब को-

न डू ई फ त्रिकोणा-

च्या ई कोनाबरोबर आ-



हे, त्या करितां अबः बकः:: डूईः ईफ
असें आहे, म्हणून ब क आणि ई फ त्या दोन
बाजू सजातीय आहेत, त्यास ब क आणि ई फ

ह्या दोन बाजूंचे गुणोत्तराच्या वर्गामध्ये **अबक** आणि **डईफ** हे दोन त्रिकोण प्रमाणांत आहेत, हे सिद्ध करावयाचे.

(६ बु० ११ व्या सि० प्र०) **बक** आणि **ईफ** ह्या दोन बाजूंस **बग** वृतीय प्रमाणपद काढ. तेदां **बकः ईफः :: ईफः बग** असें होईल. अ, ग सांध. **अबः बकः :: डईः ईफ** हेचतुः प्रमाण आहे, त्यास त्याचे पदांत (५ बु० ५ व्या सि० प्र०) परावर्तन केलें असता, **अबः डईः :: बकः ईफ** असें होते, परंतु **बकः ईफः :: ईफः बग** असें आहे, म्हणून (५ बु० ४ व्या सि० प्र०) **अबः डईः :: ईफः बग** ह्या वरून **अबग** आणि **डईफ** ह्या त्रिकोणांच्या समान कोनांच्या आंगाच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत आहेत, परंतु ज्या त्रिकोणांच्या समान कोनांच्या आंगाच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत असतात ते त्रिकोण समान असतात, असें ६ बु० १५ व्या सि० दांतांत सिद्ध केलें आहे, ह्याकरितां **अबग** त्रिकोण **डईफ** त्रिकोणाबरोबर आहे. तीनपदे प्रमाणांत असली तर प्रथमपद आणि तिसरेपद

ह्यांचे गुणोत्तर प्रथमपद आणि दुसरेपद ह्यांचे गुणो-
 त्तराच्या वर्गाबरोबर असते, आणि बक, ईफ
 आणि बग ह्या तीन रेषा प्रमाणांत आहेत, ह्या क-
 रितां बक आणि बग ह्यांचे गुणोत्तर बक
 आणि ईफ ह्यांचे गुणोत्तराचे वर्गाबरोबर आहे.
 (६ बु० १ व्या सि० प्र०) बकः बगः :: अवकः
 अबग असें आहे, म्हणून अबक आणि
 अबग ह्या दोन त्रिकोणांचे गुणोत्तर बक
 आणि ईफ ह्यांच्या गुणोत्तराच्या वर्गाबरोबर
 आहे, पण अबग त्रिकोण दुईफ त्रिकोणा
 बरोबर आहे, ह्या करितां अबक आणि दुईफ
 ह्या दोन त्रिकोणांचे गुणोत्तर बक आणि ईफ
 ह्या दोन बाजूंच्या गुणोत्तराचे वर्गाबरोबर आहे, हे
 सिद्ध.

कु० तीन रेषा प्रमाणांत असल्यास प्रथम रेषेवर
 कसाही त्रिकोण काढला व त्याशी समरूप व त्या सार-
 खा स्थित असा त्रिकोण दुसऱ्या रेषेवर काढला तर
 पहिल्या रेषेस जर तिसरी रेषा तर पहिल्या रेषेवरील
 त्रिकोणास दुसऱ्या रेषेवरील त्रिकोण असें बरील
 सिद्धनेवरून स्पष्ट आहे.

२० सिद्धांतप्रमेय.

सरूप बहुकोणाकृतींचे सरूप त्रिकोण सार-
खे पडतात, आणि त्या त्रिकोणांचें गुणोत्तर बहुको-
णाकृतींचे गुणोत्तराबरोबर असतें व बहुकोणाकृ-
तींच्या सजातीय बाजूंच्या गुणोत्तराच्या वर्गाबरो-
बर बहुकोणाकृतींचें गुणोत्तर असतें.

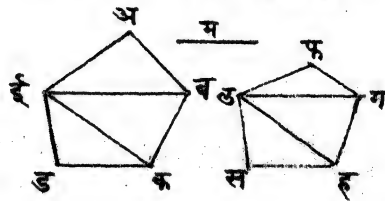
अबकडई आणि फगहसल ह्या
दोन बहुकोणाकृति सरूप आहेत, व अब बाजू
फग बाजूशीं

सजातीय आहे,

त्यास अबक

डई आणि

फगहसल ह्या दोन बहुकोणाकृतींचे सरूप
त्रिकोण सारखे पडतात, व त्या त्रिकोणांचें परस्पर
गुणोत्तर बहुकोणाकृतींच्या गुणोत्तराबरोबर आहे,
आणि अब आणि फग ह्या दोन बाजूंच्या गु-
णोत्तराच्या वर्गाबरोबर अबकडई आणि फगह
सल ह्या बहुकोणाकृतींचें गुणोत्तर आहे, हे सिद्ध करावयाचें
व, ई ई, क ग, ल ल, ह सांध. अब



क ड ई बहुकोणाकृति फ ग ह स ल बहुकोणा-
 कृतीशीं सरूप आहे, ह्या करितां (६ बु० ६ व्या व्याख्ये
 वरून) ब अ ई कोन ग फ ल कोनाबरोबर आ-
 हे, आणि ब अः अ ईः ग फः फ ल असें
 आहे; आतां ब अ ई आणि ग फ ल ह्या दोन
 त्रिकोणांत अ कोन फ कोनाबरोबर आहे, आणि ह्या
 दोन कोनांच्या आंगाच्या बाजू प्रमाणांत आहेत, ह्या
 करितां हे दोन त्रिकोण (६ बु० ६ व्या सि० प्र०) सम-
 कोण आहेत, आणि म्हणून ते (६ बु० ४ व्या सि०
 प्र०) सरूप आहेत, म्हणून अब ई कोन फ ग ल
 कोनाबरोबर आहे. ह्या बहुकोणाकृति सरूप आहेत,
 ह्या करितां सगळ्या अब क कोन सगळ्या फ ग ह
 कोनाबरोबर आहे, ह्या करितां अर्थांतच ई ब क
 कोन ल ग ह कोनाबरोबर आहे. अब ई आणि
 फ ग ल हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत, ह्या करितां
 ई बः ब अः ल गः ग फ बहुकोणाकृति
 सरूप आहेत, ह्या करितां अबः ब कः फ गः
 ग ह, म्हणून (५ बु० ११ व्या सि० व०) ई बः
 ब कः ल गः ग ह. ह्या वरून असें झाले,
 कीं ई ब क आणि ल ग ह ह्या दोन समान को-

नांच्या आंगच्या बाजू प्रमाणांत आहेत, म्हणून
ईबक त्रिकोण ल ग ह त्रिकोणाचीं समकोण व
 सरूप आहे. त्याचरीतीनें **ईकड** त्रिकोण
 ल ह स त्रिकोणाचीं समकोण व सरूप आहे अ-
 से सिद्ध होते, म्हणून **अबकडई** आणि **फग**
हसल ह्या दोन सरूप आकृतीचे सरूप त्रिकोण
 समान पडले असत, हे सिद्ध.

आतां ह्या सर्व त्रिकोणांचे परस्परांचे गुणोत्तर
 बहुकोणाकृतीच्या गुणोत्तराबरोबर आहे, व **अब**
 आणि **फग** ह्या दोन बाजूंच्या गुणोत्तराच्या वर्गाब-
 रोबर **अबकडई** आणि **फगहसल** ह्या
 दोन बहुकोणाकृतीचे गुणोत्तर आहे, हे सिद्ध कराव-
 याचे.

अबई आणि **फगल** हे दोन त्रिकोण
 सरूप आहेत, ह्या करितां (६ बु० १९ व्या सि० प्र०)
बई आणि **गल** ह्या दोन बाजूंच्या गुणोत्तराच्या
 वर्गाबरोबर **अबई** आणि **फगल** ह्या दोन
 त्रिकोणांचे गुणोत्तर आहे. आणि ह्याच कारणास्तव
बई आणि **गल** ह्यांच्या गुणोत्तराच्या वर्गाब-
 रोबर **बईक** आणि **गलह** ह्या दोन त्रिकोणांचे

गुणोत्तर आहे, म्हणून (५ बु० ४ व्या सि० प्र०) अ
 बई त्रिकोणास जर फ ग ल त्रिकोण तर बई क
 त्रिकोणास ग ल ह त्रिकोण. ई ब क आणि ल ग ह
 हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत, ह्या करितां ई क आ-
 णि ल ह ह्या दोन बाजूंचे गुणोत्तराचे वर्गाबरोबर
 ई ब क आणि ल ग ह ह्या दोन त्रिकोणांचे गुणो-
 त्तर आहे, व ई क ड आणि ल ह स हे दोन त्रिकोण
 सरूप आहेत, ह्या करितां ई क आणि ल ह ह्या
 दोन बाजूंचे गुणोत्तराचे वर्गाबरोबर ई क ड
 आणि ल ह स ह्या दोन त्रिकोणांचे गुणोत्तर
 आहे, म्हणून ई ब क : ल ग ह :: ई क ड :
 ल ह स. अबई : फ ग ल :: ई ब क :
 ल ग ह असें सिद्ध केले आहे, ह्या करितां अ
 बई : फ ग ल :: ई ब क : ल ग ह
 आणि ई ब क : ल ग ह :: ई क ड : ल ह स,
 ह्या करितां (५ बु० १४ व्या सि० प्र०) अबई
 त्रिकोणास जर फ ग ल त्रिकोण तर अब क
 ड ई बहुकोणाकृतीस फ ग ह स ल बहुकोणा-
 कृति अब आणि फ ग ह्या दोन सजातीय बाजू-
 चे गुणोत्तराचे वर्गाबरोबर अब ई आणि

फगल ह्या दोन त्रिकोणांचें गुणोत्तर आहे, ह्या
करितां अब आणि फग ह्या दोन बाजूंच्या गु-
णोत्तराचे वर्गाबरोबर फगहसल आणि
अबकडई ह्या दोन बहुकोणाकृतींचें गुणो-
त्तर आहे.

१ कु० आकृतीस कितीही बाजू असल्या आ-
णि त्या आकृति जर सरूप असल्या तर त्यांचें गु-
णोत्तर त्या आकृतींच्या सजातीय बाजूंच्या गुणो-
त्तराच्या वर्गावरोबर असतें, हें वरीलरीतीनें च मि-
ळ होईल, ह्या करितां सरूप सरलरेषाकृतींचें गुणो-
त्तर त्यांच्या सजातीय बाजूंच्या गुणोत्तराचे वर्गा व-
रोबर असतें असें सामान्यतः म्हटलें असतां चा-
लेल.

२ कु० सजातीय बाजूं पैकी ज्या दोन बाजू
अब आणि फ ग ह्यांस म रेघ तृतीयपद घेत-
ले असतां हे स्पष्ट आहे, कीं अब आणि म ह्यां-
चें गुणोत्तर अब आणि फ ग ह्यांचे गुणोत्तराचे
वर्गाबरोबर आहे. परंतु अब आणि फ ग ह्या
बाजूंवरील चतुष्कोणाकृति किंवा बहुकोणाकृति
ह्यांचें गुणोत्तर अब आणि फ ग ह्यांचे गुणोत्त-
राचे वर्गाबरोबर आहे, ह्याकरितां अब

जर म तर अब रेघेवरील आकृतीस फ ग रेघे
वरील आकृति. ६ बु. १९ व्या सि. कु. मध्ये त्रिको-
णाविषयी ही गोष्ट सिद्ध केली आहेच, ह्या करितां
ही गोष्ट स्पष्ट आहे, कीं तीन रेघा प्रमाणांत असल्यास
पाहिले रेघेस जर तिसरी रेघ तर पाहिले रेघेवरील
सरल रेखाकृतीस दुसरे रेघेवरील सरूप सरल रेखा
कृति.

३ कु. सर्वचौरसें सरूप असतात, म्हणून कोण-
त्याही दोन चौरसांचें गुणोत्तर त्यांच्या बाजूंच्या गु-
णोत्तराचे वर्गाबरोबर असतें, ह्या करितां कोणत्याही
दोन सरूप सरल रेखाकृति व त्यांच्या मज्जातीय बा-
जूंचे वर्गही परस्पर प्रमाणांत असतात.

२१ सिद्धांत. प्रमेय.

ज्या सरल रेखाकृति दुसऱ्या एका सरल रेखा
कृतीशीं सरूप असतात त्या परस्पर सरूप अस-
तात.

अ आणि ब ह्या सरल रेखाकृति क सर-
ल रेखाकृतीशीं सरूप आहेत, त्याम त्या परस्पर
सरूप आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

अ आकृति क आकृतीचीं सरूप आहे.

ह्या करितां (६ बु०

६ व्या व्या० प्र०)

त्या समकोण आ-



हेत, व त्यांच्या समकोनांच्या आंगच्या बाजू प्रमाणांत आहेत. ब आणि क ह्या आकृति सरूप आहेत, ह्या करितां त्याही समकोण आहेत, व त्यांच्या समकोनांच्या आंगच्या बाजू प्रमाणांत आहेत. ज्या अर्थी अ आणि ब ह्या आकृती पैकीं प्रत्येक आकृति क आकृतीचीं समकोण आढे व त्या प्रत्येक आकृतीच्या एक आकृतीच्या समकोणांजबळच्या बाजू प्रमाणांत आहेत, त्या अर्थी (९ बु० ४ व्या सि० प्र०) अ आणि ब आकृति समकोण आहेत, व त्यांच्या समकोनांजबळच्या बाजू प्रमाणांत आहेत, म्हणून अ आकृति ब आकृतीचीं सरूप आहे, हे सिद्ध.

२२ सिद्धांत प्रमेय.

ज्या चार सरळ रेषा परस्पर प्रमाणांत असतात त्यांवर सजातीय रीतीनें सरूप आकृति काढल्या असता त्या परस्पर प्रमाणांत असतात. चार

सरलरेषांवर सजानीय रीतीनें सरूप काढलेल्या
आकृति परस्पर प्रमाणांत असल्यास त्या सरलरे
ही परस्पर प्रमाणांत असनात.

अब, कड, ईफ आणि गह ह्या चा
सरलरेषा परस्पर प्रमाणांत आहेत, म्हणजे अ
बः कड :: ईफः गह आणि अब
आणि कड ह्या दोन रेषांवर सजानीय रीतीनें
स अब आणि लकड अशा सरूप आकृति
काढल्या आहेत, व त्या प्रमाणेच ईफ आणि
गह ह्या दोन रेषांवर मफ आणि नह ह्या
दोन सरूप आकृति काढल्या आहेत, त्यास सअ
ब आकृतीस जर लकड तर मफ आकृतीस
नह, हें सिद्ध करावयाचें.

(६ बु० ११ व्या सि० प्र०) अब आणि
कड ह्या दोन रेषांस तृतीय पद क्ष रेषा काढ,

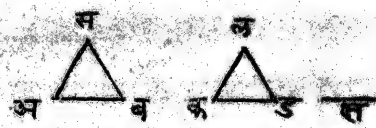
आणि ईफ

आणि गह

ह्या दोन रेषांस

तृतीय पद ओ

रेषा काढ.



अबः कडः:: ईफः गह असें आहे, आ-
 णि (५ बु० ४ व्या सि० प्र०) कडः क्षः:: गहः
 ओ, म्हणून (५ बु० ११ व्या सि० प्र०) अबः
 क्षः:: ईफः ओ, परंतु (६ बु० २० व्या सि०
 २ कु० प्र०) अबः क्षः:: सअबः लकड आ-
 णि ईफः ओः:: मफः नह, म्हणून सअब
 सरलरेषाकृतीस जर लकड सरलरेषाकृति तर
 मफ सरलरेषाकृतीस नह सरलरेषाकृति, हे
 सिद्ध.

आतां सअब, लकड, मफ आणि
 नह ह्या चार सरलरेषाकृति परस्पर प्रमाणांत आ-
 हेत, त्यास अबः कडः:: ईफः गह, हे सिद्ध
 करावयाचे.

(६ बु० १२ व्या सि० प्र०) अब, कड आ-
 णि ईफ ह्या तीन रेषांस चौथें पर पर रेषा काढ,
 आणि (६ बु० १० व्या सि० प्र०) मफ आकृती-
 रीं किंवा नह आकृतीरीं सरूप व ती प्रमाणें लि-
 त अशी झार सरलरेषाकृति पर रेखेवर काढ,
 आतां अबः कडः:: ईफः पर असें आहे,
 व अब आणि कड ह्या दोन रेषांवर सारख्या

स्थित व सरूप अशा सअब आणि लकड सर-
 लरेषाकृति काढल्या आहेत, व ईफ आणि पर
 ह्या दोन रेषांवर, सारख्यास्थित व सरूप अशा मफ
 आणि शर सरलरेषाकृति काढल्या आहेत, म्हणून
 सअबः लकडः:: मफः शर, परंतु सअबः ल
 कडः:: मफः नह असें ग्रहीत आहे, ह्या करि-
 तां मफ आकृतीचें नह आणि शर ह्या आक-
 तीशीं समान गुणोत्तर आहे, ह्या करितां (५ बु० ३
 व्या सि० प्र०) नह आकृति शर आकृतीशीं समा-
 न आहे, आणि ह्या आकृति सरूप व सारख्या
 स्थित आहेत, ह्या करितां गह रेघ पर रेघेबरोबर
 आहे; अबः कडः:: ईफः पर असें आहे,
 आणि पर रेघ गह बरोबर आहे, म्हणून अबः
 कडः:: ईफः गह, हें सिद्ध.

कु० ज्या चार सरलरेषा प्रमाणांत असतात त्यांची
 ल चौरसेंही प्रमाणांत असतात, व जीं चार चौरसें प्रमा-
 णांत असतात त्यांच्या रेषाही प्रमाणांत असतात, का-
 रण चौरसें सरूप असतात.

२३ सिद्धान्त. प्रमेय.

समकोण समांतरभुज चौकोनांचें गुणोत्तर त्यांच्या बाजूंच्या गुणोत्तरांच्या गुणाकाराबरोबर असतें.

अ क आणि क फ असे दोन समकोण समांतरभुज चौकोन आहेत, व अ क चा ब क ड कोन क फ चे ई क ग कोनाबरोबर आहे. त्यास अ क आणि क फ ह्यांचें गुणोत्तर त्यांच्या बाजूंच्या गुणोत्तरांचे गुणाकाराबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

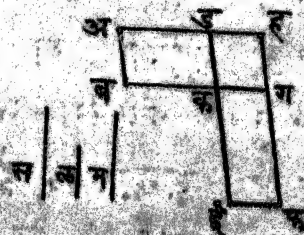
ब क आणि क ग ह्या दोन बाजू एका सरल रेषेंत येतील अशा तऱ्हेनें अ क आणि क फ हे समांतरभुज

चौकोन जवळ ठेव; (१)

बु० १४ व्या सि० प्र०)

ड क आणि क ई ह्या

दोन बाजू एका सरल रेषेंतच आहेत. ड ग समांतरभुज चौकोन पूर्ण कर. एक स रेषा घे, आणि (१ बु० १२ व्या सि० प्र०) ब क, क ग आणि



स ह्या तीन रेषांस चौथें पद ल रेषा काद, आणि
 ड क, क ई आणि ल ह्या तीन रेषांस चौथें पद म
 रेषा काद. आतां हें स्पष्ट आहे, कीं स आणि ल
 ह्या रेषांचें गुणोत्तर ब क आणि क ग ह्यांचें गु-
 णोत्तराबरोबर आहे, व ल आणि म ह्यांचें गुणो-
 त्तर ड क आणि क ई ह्यांचें गुणोत्तराबरोबर
 आहे, स आणि म ह्या दोन रेषांचें गुणोत्तर स
 आणि ल ह्यांचें गुणोत्तर व ल आणि म ह्यांचें गु-
 णोत्तर ह्यांच्या गुणाकाराबरोबर आहे, म्हणून स
 आणि म ह्यांचें गुणोत्तर ब क आणि क ग यां-
 चें गुणोत्तर व ड क आणि क ई ह्यांचें गुणोत्तर
 ह्यांचे गुणाकाराबरोबर आहे. (६ बु० १ व्या सि०
 प्र०) ब क : क ग :: अ क : क ह, परंतु
 ब क : क ग :: स : ल असें आहे, साकरितां
 (५ बु० ४ व्या सि० प्र०) स : ल :: अ क :
 क ह. ड क : क ई :: क ह : क फ, पण
 ड क : क ई :: ल : म असें आहे, साकरितां
 ल : म :: क ह : क फ. स : ल :: अ क :
 क ह व ल : म :: क ह : क फ असें सिद्ध
 झाले, साकरितां (५ बु० ११ व्या सि० प्र०)

सः मः:: अकः कफ. स आणि म ह्या दोन
 रेखांचें गुणोत्तर अक आणि क फ ह्या दोन सणां-
 तर भुज चौकोनांचे बाजूंचे गुणोत्तरांचे गुणाकार
 बरोबर आहे, असें सिद्ध केलें आहे, साकारितां अक
 आणि क फ ह्यांचें गुणोत्तर ह्यांच्या बाजूंच्या गु-
 णोत्तरांच्या गुणाकाराबरोबर आहे, हें सिद्ध.

कु० दोन चतुःप्रमाणांतील पदे रेखा असल्यास ह्या-
 च्यासरूपपदांचे काढकोन चौकोन ही प्रमाणांत अस-
 तात.

अः बः:: कड व ईः फः:: गः ह अ-
 शीं दोन चतुःप्रमाणें आहेत. ह्यांचे सरूपपदांचे काढ-
 कोन चौकोनांस म्हणजे अ x ई, ब x फ,
 क x ग, आणि ड x ह ह्यांस अनुक्रमे म,
 न, प आणि ष अशीं नांवां देऊ. (बु० २३ व्या
 सि० प्र०) म आणि न ह्या काढकोन चौकोनांचें
 गुणोत्तर अ आणि ब, आणि ई आणि फ रेखांचे गुणो-
 त्तरांचे गुणाकाराबरोबर आहे, व प आणि ष
 ह्या काढकोन चौकोनांचें गुणोत्तर क आणि ड
 व ग आणि ह ह्यांचे गुणोत्तरांचे गुणाकाराबरो-
 बर आहे, परंतु अ आणि ब, ई आणि फ ह्यांची

गुणोत्तरें क आणि ड आणि ग आणि ह त्यांच्या
गुणोत्तरांबरोबर आहेत, त्या करितां त्यांचे गुणाकार
बरोबर आहेत, म्हणून मः नः :: पः षः, हे सि-
द्ध.

२ कु०. त्या वरील कुरलीवरून स्पष्ट आहे,
कीं ज्या काढकोनचौकोनांचे पाये व उंचाहीं प्रमा-
णांत असतात, ते परस्पर प्रमाणांत असतात.

२४ सिद्धांत प्रमेय.

कोणत्याही समांतरभुजचौकोनांत त्याची
कर्णरेषा ज्यांतून जाते असे जे समांतरभुजचौकोन
पडतात ते थोरल्या समांतरभुजचौकोनाशीं सरूप
असतात, व परस्परांशीं सरूप असतात.

अब कड एक समांतरभुजचौकोन आ-
हे. त्याचा कर्ण अक आहे, आणि ते ई ग आ-
णि ह स ह्या दोन समांतरभुजचौकोनांतून जा-
तो, त्यास ते अब कड समांतरभुजचौकोनाशीं
सरूप आहेत, व परस्परांशीं सरूप आहेत, हे सि-
द्ध करावयाचे.

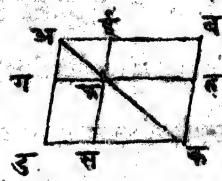
ड क आणि ग फ ह्या दोन रेषा समां-

तर आहेत, आणि त्यांस

अड रेघ छेदिते, ह्याकरि

तां (१ बु० २९ व्या सि०

प्र०) अडक कोन



अ ग क कोनाबरोबर आहे. तसेंच बक, ईफ
हीं समांतर आहे, आणि त्यांस अ ब रेघ छेदिते,
ह्या करितां अ ब क कोन अ ई फ कोनाबरो-
बर आहे. (१ बु० ३४ व्या सि० प्र०) ब क ड
कोन व ई फ ग कोन ह्यांपैकी प्रत्येक कोन ड अ ब
कोनाबरोबर आहे, म्हणून ते परस्पर बरोबर आहेत,
ह्या करितां अ ब क ड आणि अ ई फ ग हे
समांतर भुज चौकोन समकोण आहेत. अ ब क
आणि अ ई फ ह्या दोन त्रिकोणांत अ ब क कोन
अ ई फ कोनाबरोबर आहे, व ब अ क कोन दोन्ही
त्रिकोणांस साधारण आहे, ह्या करितां ते त्रिकोण सम-
कोण आहेत, म्हणून (६ बु० ४ व्या सि० प्र०) अ ब:
ब क :: अ ई: ई फ. समांतर भुज चौकोनाच्या
समोरासमोरच्या बाजू बरोबर असतात, ह्या करितां
अ ब: अ ड :: अ ई: अ ग व ड क: ब क ::
ग क: ई फ व ड क: ड अ :: फ ग: ग अ.

ह्या करितां अब कड आणि अई फ ग ह्या दोन
 समांतर भुजचौकोनांच्या समकोनांच्या आंगच्या बाजू
 प्रमाणांत आहेत, म्हणून (६ बु० ६ व्या सि० प्र०)
 ते परस्पर सरूप आहेत, व ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होतें,
 कीं अब कड आणि फ ह्क स हे दोन समांतर
 भुजचौकोन सरूप आहेत, तेव्हां ग ई आणि स ह्
 ह्या पैकीं प्रत्येक समांतर भुजचौकोन ड ब समांतर
 भुजचौकोनाशीं सरूप आहे, व ६ बुकाच्या २१ व्या
 सिद्धांतांत असें सिद्ध केले आहे, कीं ज्या आकृति दु-
 सऱ्या एका आकृतीशीं सरूप असतात, त्या परस्पर
 सरूप असतात, म्हणून ग ई समांतर भुजचौकोन
 स ह् समांतर भुजचौकोनाशीं सरूप आहे, हे सिद्ध.

२५ सिद्धांत. कृत्य.

दोन विवक्षित सरल रेषाकृतीं पैकीं एका आ-
 कृतीशीं सरूप व दुसरे आकृतीशीं समान अशी
 एक सरल रेषाकृति काढावयाची.

अब क आणि ड अशा दोन सरल रेषा
 कृति आहेत, त्यास अब क शीं सरूप व ड शीं
 समान अशी एक आकृति काढावयाची.

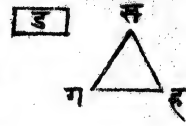
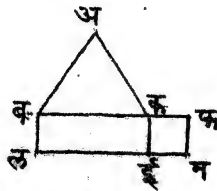
(१ बु० ४५ व्या सि० कु० प्र०) ब क रेषेवर

अब क त्रिकोणाशीं

समान असा ब ई

समांतर भुज चौकोन

काढ, व क ई रेषेवर



दुशीं समान व ज्याचा फ क ई कोन क ब ल कोना-

शीं समान होईल, असा क म समांतर भुज चौकोन

काढ. (१ बु० १४ व्या सि० प्र०) ब क आणि

फ क ह्या दोन बाजू एका सरल रेषेत आहेत, व

ल ई आणि ई म ह्या दोन बाजू (१ बु० २९ व्या

सि० प्र०) एका सरल रेषेत आहेत. (६ बु० १३ व्या

सि० प्र०) ब क आणि फ क ह्यांचें मध्यपद ग ह

रेषा काढ, आणि तीवर (६ बु० १० व्या सि० प्र०)

अ ब क आकृतीशीं सरूप व ती प्रमाणें स्थित अशी

एक स ग ह आकृति काढ. ब क, ग ह, आणि

क फ ह्या तीन रेषा प्रमाणांत आहेत, म्हणजे ब क:

ग ह :: ग ह: क फ, व ज्या तीन रेषा प्रमाणांत

असतात, त्यांपैकीं पहिल्या रेषेवर आकृति काढून

त्या आकृतिशीं सरूप व ती प्रमाणें स्थित अशी आ-

कृति दुसरे रेषेवर काढली असतां पहिल्या रेषेस

जर तिसरीरेषा तर पहिल्या रेषेवर काढलेल्या
 कृतीस दुसऱ्या रेषेवर काढलेली आकृति असे
 बु० २० व्या सि० २ कुरलरीत सिद्ध केले आहे,
 गून बकः कफः :: अबकः सगह,
 रंतु (६ बु० १ व्या सि० प्र०) बकः कफ
 बईः ईफ, म्हणून (९ बु० ४ व्या सि० प्र०
 अबकः सगहः :: बईः ईफ. आता
 अबक आकृति बई आकृतीशीं समान
 आहे, त्याकरितां सगह आकृति ईफ आकृति
 शीं समान आहे हे स्पष्टच आहे. ईफ आकृति
 आकृतीबरोबर आहे, त्याकरितां सगह आकृति
 बई आकृतीशीं समान आहे, आणि ती आकृती उ
 बक शीं सरूप आहे, त्याकरितां अबक
 सरूप बई शीं समान अशीं सगह आकृति
 काढली असे.

२६ सिद्धांत. प्रमेय.

जर दोन सरूप समांतर भुजचौकोनांस
 कोन साधारण असला व ते सारखे स्थित अस
 तर त्यांच्या कर्णरेषा एकाच सरळ रेषेत असता

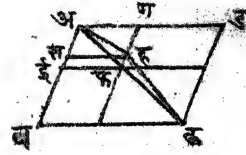
अबकड आणि अईफग असे दोन

सरूप समांतरभुज चौकोन

आहेत, व ते सारखे स्थित

आहेत, आणि त्यांस ड

अब कोन साधारण आहे,



त्यास त्यांच्या कर्णरेषा एकाच सरळरेषेत आहेत, हे सिद्ध करावयाचे.

बड आणि ईग ह्या समांतरभुज चौकोनां -

च्या **अक** आणि **अफ** कर्णरेषा एका रेषेत नाहीत

असें म्हटल्यास **अक** कर्णरेषा, **अफ** कर्णरेषा

ज्या रेषेत आहे तीहून भिन्न जी **अहक** रेषा ती-

त आहे, व **गफ** रेषा **अहक** रेषेला ह स्थळीं

छेदिते असें मानूं. **ह** बिंदूतून **अड** रेषी किंवा **ब**

क रेषीं समांतर **हस** रेषा कर. **अबकड** आणि

असहग ह्या दोन समांतरभुज चौकोनां मधून

अहक कर्णरेषा जाते, ह्या करितां (६बु० २४ व्या

सि० प्र०) ते सरूप आहेत, म्हणून (६बु० ६ व्या

व्या० प्र०) **डअः अबः** **गअः असः**

अबकड आणि **अईफग** समांतरभुज चौ-

कोन सरूप आहेत, ह्या करितां **डअः अबः**

ग अः अई, म्हणून (५ बु० ४ थ्या सि० प्र०)
 ग अः अई :: ग अः अस. आतां अस
 आणि अई ह्या दोन रेखांशीं ग अ रेखेचें समान
 गुणोत्तर आहे, ह्या करितां (५ बु० ३-या सि० प्र०.)
 अस, अई बरोबर आहे, परंतु लहान रेख मोठ्या
 रेखेबरोबर होणें ही गोष्ट अशक्य, ह्यास्तव अबकड
 समांतरभुज चौकोनाची कर्ण रेखा अहक रेखेंत ना-
 हीं, आणि ह्या प्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल, कीं अफ
 कर्णरेखा ज्या रेखेंत आहे ती शिवाय दुसरे रेखेंमध्ये
 अबकड चौकोनाची कर्णरेखा असणार नाहीं,
 ह्यास्तव अबकड आणि अई फ ग ह्या दोन
 समांतर भुज चौकोनांच्या कर्णरेखा एकाच रेखेंत
 आहेत.

२७ सिद्धांत. प्रमेय.

रेखेचे कसेही दोन विषम भाग पाडले तरी त्यां-
 चा जो काटकोन चौकोन होतो, तो अर्धरेखेच्या चौरसा
 पेक्षां लहान असतो.

अब एक सरळरेख आहे, तिचे क स्थळीं
 दोन समान भाग केले आहेत, व दु स्थळीं दोन अस-

मान भाग केले आहेत, त्यास अड आणि बड
 ह्यांचा काटकोनचौकोन
 अकच्या चौरसापेक्षां
 लहान आहे, हे सिद्ध कर- $\overline{अ \quad क \quad ड \quad ब}$
 वयाचे.

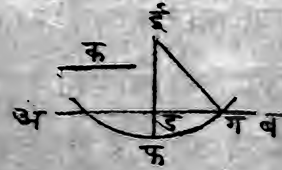
अब रेघेचे क स्थळीं दोन समान भाग के-
 ले आहेत, व ड स्थळीं दोन असमान भाग केले
 आहेत, त्या करितां (२ बु० ५ व्या सि० प्र०) अड
 \times बड + कड = अक. ह्यावरून स्पष्ट होते,
 कीं अकचे चौरस अड आणि बड ह्यांच्या
 काटकोनचौकोनापेक्षां मोठे आहे.

२८ सिद्धांत. कृत्य.

विवक्षित रेघेचे असे दोन खंड करावयाचे कीं
 त्यांचा काटकोनचौकोन विवक्षित क्षेत्राबरोबर हो-
 ईल. परंतु विवक्षित क्षेत्र विवक्षित रेघेच्या अर्धाच्या
 वर्गापेक्षां ज्यास्त असूं नये.

अब विवक्षित रेघ आहे व क रेघेचे चौर-
 स विवक्षित क्षेत्र आहे, त्यास अब रेघेचे असे दोन
 खंड करावयाचे कीं त्यांचा काटकोनचौकोन क

रेघेवरील चौरसाबरो -
बर होईल. क रेघेचें
चौरस अबच्या अर्धा
वरील चौरसापेक्षां मोठें
नाहीं.



अब रेघेचे ड स्थळीं दोन समान भाग कर,
अडचावर्ग क चे वर्गाबरोबर असल्यास जें पाहिजे
होतें तें झालें. अडचावर्ग कच्या वर्गाबरोबर नस-
ल्यास अड रेघ क पेक्षां मोठी आहे, हें प्रतिज्ञेव-
रून स्पष्टच आहे. अब रेघेवर डई लंब कर,
आणि डई रेघ क रेघेशीं बरोबर कर. ईड रेघ
फ पर्यंत वाढीव, आणि ईफ, अड बरोबर कर.
नंतर ई मध्यकल्पून ईफ निज्जेनें वर्तुल काढतें
अब रेघेस ग स्थळीं छेदिते असें मानूं. ई, ग
सांध. अब रेघेचे समान भाग ड स्थळीं झाले आ-
हेत, व असमान भाग ग स्थळीं झाले आहेत, ह्या
करितां (२ बु० ५ व्या सि० प्र०) अडई = अग
× गब + डगो पण अड, ईफ आणि
ईग ह्या रेखाबरोबर आहेत, ह्या करितां ईगै =
अग × बग + डगै. (१ बु० ४० व्या सि० प्र०)

ई गे = ईडे + उ गे, ह्या करितां ईडे +
 ड गे = अग × बग + ड गे. ड गे होन्ही
 पेढ्यांस साधारण आहे, ह्या करितां तो काढून दा-
 किला असतां ईडे = अग × बग. ईड, क
 बरोबर आहे, ह्या करितां कै = अग × बग.
 तेव्हां क च्या वर्गाबरोबर ज्यांचा काटकोन चौकोन
 आहे, असे अग आणि ग ब खंड अब रेघेचे
 पडले असत.

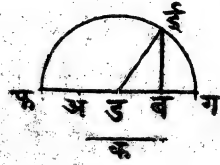
२९ सिद्धांत. प्रमेय.

विवक्षित रेषा इतकी वाढवावयाची आहे,
 कीं तिचे बाहेरील खंडांचा काटकोन चौकोन विव-
 क्षित क्षेत्राबरोबर होईल.

अब विवक्षित रेघ आहे, आणि क वरचें
 चौरस विवक्षित क्षेत्र आहे, त्यास अब रेघ इत-
 की वाढवावयाची आहे, कीं तिचे बाहेरील खंडां-
 चा काटकोन चौकोन क च्या वर्गाबरोबर होईल.

अब रेघेचे ड स्थळीं दोन समान भाग
 कर, अब वर बई लंब कर, आणि तो क बरो-
 वर कर. डई सांध. ड मध्यकल्पून डई त्रि-

ज्येनें फ ई ग वर्तुल
काढ. ते वर्तुल अब
बाजू वाढविली असतां
तीस ग स्थळीं मिळते.



अब रेघेचे दोन समान भाग दु स्थळीं केले आहेत,
व ती ग स्थलापर्यंत वाढविली आहे, ह्या करितां (१
बु० ६ व्या सि० प्र०) $डु गे = अग \times बग$
+ $डबे$. $डु ग$, $ड ई$ बरोबर आहे, ह्या करितां
 $ड ई = अग \times बग + डबे$ पण (१ बु० ४०
व्या सि० प्र०) $ड ई = डबे + बई$, म्हणून
 $डबे + बई = अग \times बग + डबे$. $डबे$
दोहो पेट्यांस साधारण आहे, तो काढून टाकिला अ-
सतां $बई = अग \times बग$. $बई = के$, म्ह-
णून $के = अग \times बग$. तेव्हां क व्यावर्गाबरो-
बर ज्यांचा काढकोन चौकोन आहे, असे अब चे
बाहेरील भाग पडत तो पर्यंत अब रेघ वाढवि-
ली असे.

३० सिद्धांत कृत्य.

विवक्षित रेखेचे अंत्यमध्यप्रमाणानें खंड करावयाचे.

अब ही विवक्षित रेखा आहे, तर तिचे अंत्य-मध्यप्रमाणानें खंड करावयाचे.

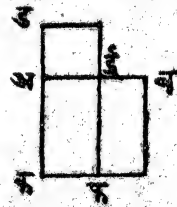
(१ बु० ४६ व्या सि० प्र०) अब रेखेवर

बक चौरस काढ, आणि

(५ बु० २२ व्या० सि० प्र०)

अक रेखेकडु पर्यंत बाढी-

व, अशी कीं अडु आणि



डक त्यांचा काढकोनचौकोन अक चे वर्गाबरोबर होईल.

अई, अडु बरोबर कर, आणि डफ काढकोनचौकोन पुरा कर. हा काढकोनचौकोन कडु आणि अई अथवा

कडु आणि अडु ह्या रेखांनीं झाला आहे. कडु ×

अडु = अक, म्हणून डफ काढकोनचौकोन

कब चौरसा बरोबर आहे; दोन्ही पेढ्यांतून त्यास

साधारण जो अफ काढकोनचौकोन तो काढून घ-

किला असतां डई बरोबर बफ होतो. बफ

माहेत,
(२
बग
रेतां
४७
णून
डब
गअ-
है, ह-
बरो-
बचे
दवि-

काटकोनचौकोन अब आणि बई ह्या दोन रेषांनीं झाला आहे, कारण अब आणि फई बरोबर आहेत; आणि डई क्षेत्र अई चा वर्ग आहे, ह्या करितां (६ बु० १७ व्या सि० प्र०) अब आणि बई ह्यांचें मध्यपद अई आहे, म्हणजे अब : अई :: अई : बई. अब अई पेशां मोठी आहे, म्हणून अई, ईब पेशां मोठी आहे, हें उघड आहे. तेव्हां (६ बु० १ व्या व्या० प्र०) अब रेषेचे ई स्थळीं मध्यप्रमाणानें खंड पाडले असत.

दुसरा प्रकार. (६ बु० ११ व्या सि० प्र०)

अब रेषेचे क स्थळीं भस्ते दोन खंड कर, कीं
अब आणि बक

अ — क — ब

ह्यांचा काटकोनचौको

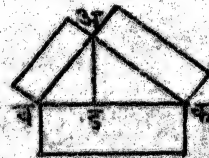
न अकचे वर्गाबरोबर होईल. अब आणि बक ह्यांचा काटकोनचौकोन अक वर्गाबरोबर आहे, ह्या करितां (६ बु० १७ व्या सि० प्र०) अब, अक आणि बक ह्या तीन रेषा प्रमाणानें आहेत, म्हणजे अब : अक :: अक : बक. तेव्हां अब रेषेचे अक मध्यप्रमाणानें खंड पाडले असत.

कु० रेघेचे अंत्यमध्यप्रमाणानें खंड पाडणें व मध्यप्रमाणानें खंड पाडणें हीं एकच होत. (२३० व्या०)

३१ सिद्धांत. प्रमेय.

काटकोन त्रिकोणांत कर्णावर सरलरेषाकृति काढली असतां ती, भुज आणि कोटि ह्यांवर त्या आकृतीशीं सरूप व ती प्रमाणें स्थित अशा सरलरेषाकृति काढल्या असतां त्यांच्या बेरजे बरोबर असते.

अबक एक काटकोन त्रिकोण आहे, त्यांत **अ** कोन काटकोन आहे, तर **बक** कर्णावर सरलरेषाकृति काढली असतां ती **अक** भुज व



अ व कोटि ह्यांवर त्या आकृतीशीं सजातीय व ती प्रमाणें स्थित अशा सरलरेषाकृति काढल्या असतां त्यांच्या बेरजे बरोबर होईल, हे सिद्ध करावयाचें.

अड लंब कर. **अबक** काटकोन त्रिकोणांत **अ** काटकोनापासून **अड** लंब **बक** कर्णावर केला आहे, ह्या करितां **ब** **अड** आणि

अकड हे त्रिकोण (६बु० ८ व्या सि० प्र०) अ
 बक त्रिकोणाचीं सरूप आहेत व परस्पर सरूप
 आहेत. अबक आणि अबड हे दोन त्रिको-
 ण सरूप आहेत, म्हणून (६बु० ४ व्या सि० प्र०)
 कबः अबः :: अबः बड. कब, अब
 आणि बड ह्या तीन रेषा प्रमाणांत आहेत, साकरि-
 तां (६बु० २० व्या सि० कु० प्र०) कबजर बड
 तर कब वरल्या आकृतीस अब वरील आकृति.
 (१बु० ६ व्या सि० प्र०) व्यस्तानें बड जर बक
 तर अब वरले आकृतीस बक वरील आकृति.
 आणि ह्याच कारणास्तव डक जर बक तर अ
 क वरल्या आकृतीस बक वरील आकृति, म्हणून
 बड आणि डक ह्यांच्या वेरजेस जर बक तर
 अब वरील आकृति व अक वरील आकृति ह्यां-
 च्या वेरजेस बक वरील आकृति, परंतु बड आ-
 णि डक ह्यांची वेरीज बक आहे, साकरितां अ
 क आणि अब ह्या बाजूंवर काढलेल्या आकृतींची
 वेरीज बक वरील आकृतीबरोबर आहे, हे सिद्ध.

३२ सिद्धांत प्रमेय.

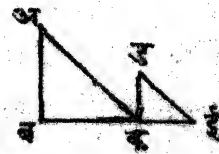
ज्या दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू दुस-
ऱ्याच्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत ते, त्यांच्या
सजातीय बाजू परस्परांशीं समांतर होतील, अशा
तद्द्वेनें एका कोनाशीं लावून ठेविले असतां, त्यांच्या
तिसऱ्या बाजू एका सरळ रेषेंत येतील.

अबक आणि डकई दोन त्रिकोण आ-
हेत. अबक त्रिको-

णाच्या बअ आणि

अक ह्या दोन बाजू ड

कई त्रिकोणाच्या कड



आणि डई ह्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत,

म्हणजे बअ : अक :: कड : डई आणि

हे त्रिकोण क कोनाजवळ असे लावून ठेविले

आहेत, कीं बअ बाजू कडशीं समांतर आहे

व अक बाजू डईशीं समांतर आहे, तर बक

आणि कई ह्या दोन बाजू एका सरळ रेषेंत येती-
ल, हे सिद्ध करावयाचे.

अब आणि डक ह्या दोन समांतर बाजूंस

अक बाजू मिळते, ह्या करितां (१ बु० २९ व्या सि० प्र०) बअक कोन अकड कोनाबरोबर आहे, आणि ह्याच कारणास्तव कडई कोन अकड कोनाबरोबर आहे, म्हणून बअक कोन कडई कोनाबरोबर आहे; आतां बअक आणि कडई ह्या दोन त्रिकोणांत अ कोन ड कोनाबरोबर आहे, आणि अ कोनाच्या बाजू अब आणि अक ह्या ड कोनाच्या आंगच्या बाजू डक आणि डई ह्यांशीं प्रमाणांत आहेत, ह्या करितां (६ बु० ६ व्या सि० प्र०) हे दोन्ही त्रिकोण समकोण आहेत, म्हणून अबक कोन डकई कोनाबरोबर आहे. बअक कोन अकड कोनाबरोबर आहे असें वर दाखविलें आहे, ह्या करितां सगळा अकई कोन अ आणि ब ह्या दोन कोनांच्या बेरजे बरोबर आहे. दोन्ही पेट्यांत अकब कोन मिळविता असतां अ कई + अकब = अ + ब + अकब, पण (१ बु० २२ व्या सि० प्र०) अ + ब + अकब = २ काटकोन, ह्या करितां अकई आणि अकब हे दोन कोन मिळूनही दोन काटकोन आहेत. ते ह्या (१ बु० १४ व्या सि० प्र०) बक आणि कई

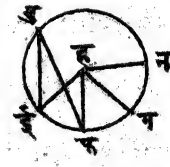
ह्या दोन रेखा एका सरल रेखेंत आहेत, हें सिद्ध.

३३ सिद्धांत. प्रमेय.

समानवर्तुळांत मध्याला किंवा घेराळा लागून जे कोन असतात त्यांचें गुणोत्तर ते ज्या कोंसांवर असतात त्यांच्या गुणोत्तराबरोबर असतें, व त्या कोंसांचें गुणोत्तर सेकतोंरांचे गुणोत्तराबरोबर असतें.

अबक आ-

णि ड ई फ ही दोन
समान वर्तुळें आ-
हेत, त्यांत मध्या-



ला लागून ब ग क आणि ई ह फ दोन कोन आ-
हेत, व परिघाला लागून ब अ क आणि ई ड फ
दोन कोन आहेत, त्यास ब क कोंसास जर ई फ
कोंस तर ब ग क कोंसास ई ह फ कोन व ब अ
क कोंसास ई ड फ कोन व ब ग क सेकतोंरास
ई ह फ सेकतोंर, हें सिद्ध करावयाचें.

कस आणि सल हे कोंस ब क कोंसा ए-
वढे प्रत्येक कर, व ई फ कोंसा एवढे फ म आणि
म न कोंस कर. ग, स ग, ल ह, म ह, न सांथ.

अक बाजू मिळते, ह्या करितां (१ बु० २९ व्या सि०
 प्र०) बअक कोन अकड कोनाबरोबर आ-
 हे, आणि ह्याच कारणास्तव कडई कोन अकड
 कोनाबरोबर आहे, म्हणून बअक कोन कडई
 कोनाबरोबर आहे; आतां बअक आणि कडई
 ह्या दोन त्रिकोणांत अ कोन ड कोनाबरोबर आहे,
 आणि अ कोनाच्या बाजू अब आणि अक ह्या
 ड कोनाच्या आंगाच्या बाजू डक आणि डई
 ह्यांशीं प्रमाणांत आहेत, ह्या करितां (६ बु० ६ व्या सि०
 प्र०) हे दोन्ही त्रिकोण समकोण आहेत, म्हणून
 अबक कोन डकई कोनाबरोबर आहे. बअक
 कोन अकड कोनाबरोबर आहे असें वर दाखवि-
 लें आहे, ह्या करितां सगळ्या अकई कोन अ
 आणि ब ह्या दोन कोनांच्या बेरजे बरोबर आहे.
 दोन्ही पैत्यांत अकब कोन मिळविता असतां अ
 कई + अकब = अ + ब + अकब, परं-
 तु (१ बु० २२ व्या सि० प्र०) अ + ब + अकब
 = २ काटकोन, ह्या करितां अकई आणि अकब
 हे दोन कोन मिळूनही दोन काटकोन आहेत. ते-
 ला (१ बु० १४ व्या सि० प्र०) बक आणि कई

ह्या दोन रेखा एका सरल रेखेंत आहेत, हें सिद्ध.

३३ सिद्धांत. प्रमेय.

समानवर्तुळांत मध्याला किंवा घेराळा लागून जे कोन असतात त्यांचें गुणोत्तर ते ज्या कोंसांवर असतात त्यांच्या गुणोत्तराबरोबर असतें, व त्या कोंसांचें गुणोत्तर सेकतोरोंचे गुणोत्तराबरोबर असतें.

अबकआ-

णि डईफ हीं दोन
समान वर्तुळें आ-
हेत, त्यांत मध्या-



ला लागून बगक आणि ईहफ दोन कोन आ-
हेत, व परिघाळा लागून बअक आणि ईडफ
दोन कोन आहेत, त्यास बक कोंसास जर ईफ
कोंस तर बगक कोंसास ईहफ कोन व बअ
क कोंसास ईडफ कोन व बगक सेकतोरस
ईहफ सेकतोर हें सिद्ध करावयाचें.

कस आणि सल हे कोंस बक कोंसाए-
वढे प्रत्येक कर, व ईफ कोंसा एवढे फम आणि
मन कोंसकर. ग, स ग, ल ह, म ह, न सांथ.

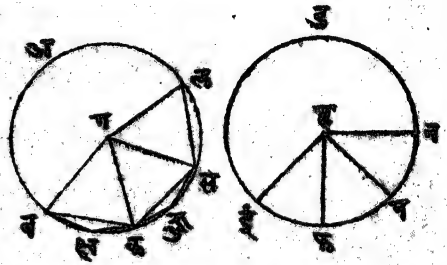
बक, कस, आणि सल हे कौंस परस्पर बरोबर आहेत, त्या करितां (३ बु० २७ व्या सि० प्र०) बगक क ग स आणि स ग ल हे कोन परस्पर बरोबर आहेत, त्या करितां बल कौंस बक च्या जितके पट आहे, तितकेच पट बगल कोन बगक कोनाच्या आहे. ईन कौंस ईफ कौंसाच्या जितके पट आहे तितके पट ईहन कोन ईहफ कोनाच्या आहे, हे वरील प्रमाणेंच सिद्ध होतें. बल कौंस ईन कौंसाबरोबर असल्यास बगल कोन ईहन कोनाबरोबर होईल. बल कौंस ईन कौंसापेक्षां मोठा असल्यास बगल कोन ईहन कोनापेक्षां मोठा होईल. बल कौंस ईन कौंसापेक्षां लहान असल्यास बगल कोन ईहन कोनापेक्षां लहान होईल. बक आणि ईफ दोन कौंस व बगक आणि ईहफ दोन कोन अशीं चारपदे आहेत. बक कौंस व बगक कोन ह्यांचीं समव्यापकें बल कौंस व बगल कोन हीं घेतलीं आहेत. तसेंच ईफ कौंस व ईहफ कोन ह्यांचीं समव्यापकें ईन कौंस व ईहन कोन हीं घेतलीं आहेत, आणि हे सिद्ध केले आहे, कीं बल कौंस ईन कौंसापेक्षां मोठा असल्यास बगल कोन

ईहन कोनापेक्षां मोठा होईल, बरोबर असल्यास
 बरोबर होईल, व लहान असल्यास लहान होईल, ह्या
 करितां (१ बु० ५ व्या व्या० प्र०) बक कोंसास जर
 ईफ कोंस तर बगक कोनास ईहफ कोन, व
 (३ बु० १० व्या सि० प्र०) बगक कोन अबक
 कोनाच्या दुप्पट आहे, व ईहफ कोन ईडफ को-
 नाच्या दुप्पट आहे, ह्या करितां बकः ईफः बअ
 कः ईडफः.

आतां, बक कोंसास जर ईफ कोंस तर
 बगक सेकतोरास ईहफ सेकतोरेहें सिद्ध-
 रावयाचें.

ब, क क, स सांघ. ब क आणि क स ह्या
 दोन कोंसांत क्ष आणि ओ हे दोन बिंदु ये आणि
 ब, क्ष क्ष, क क, ओ ओ, स बिंदु सांघ.
 ग ब क आणि ग क स ह्या दोन त्रिकोणांत बग
 आणि ग क ह्या दोन बाजू क ग आणि ग स ह्या
 दोन बाजू बरोबर आहेत, आणि त्यांच्या मधील कोन
 सारखे आहेत, ह्या करितां (१ बु० ४ व्या सि० प्र०)
 बक पाया क स पाया बरोबर आहे, आणि ग ब क
 त्रिकोण ग क स त्रिकोणाबरोबर आहे. बक कोंस

कस कौंसाबरोबर
आहे, ह्या करितां ब
अक आणि कअ
स हे ही कौंसा बरो-
बर आहेत, म्हणून



बक्षक कोन कओस कोनाबरोबर आहे, म्हणून
बक्षक वर्तुळखंड कओस वर्तुळखंडाशीं सरूप
आहे, आणि हे दोन्ही वर्तुळखंड समानरेषांवर आहेत.
जे सरूप वर्तुळखंड समानरेषांवर असतात ते परस्पर
बरोबर असतात, असें ३ बु० २४ च्या सिद्धांतांन सां-
गितलें आहे, ह्या करितां बक्षक खंड कओस
खंडाबरोबर आहे. बगक त्रिकोण कगस वि-
कोणाबरोबर आहे, असें सिद्ध केलेच आहे, ह्या करितां
बगक सेकतोर कगस सेकतोरबरोबर आहे.
आणि ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं सगळीं सेकतोर
बगक आणि कगस सेकतोरबरोबर प्रत्येकीं
आहे, व ई हफ, फहम आणि महन हे सेक-
तोर परस्परबरोबर आहेत, म्हणून बल कौंसा बक्ष
कौंसाच्या जितके पट आहे तितके पट बगल सेक-
तोर बगक सेकतोरच्या आहे, तसेंच ईन

कौंस ई फ कौंसाच्या जिनकेपट आहे नितेकेचपट
 ई ह न सेकतोर ई ह फ सेकतोरच्या आहे. बल
 कौंस ई न कौंसाबरोबर असल्यास ब ग ल सेक-
 तोर ई ह न सेकतोरबरोबर होईल. बल कौंस
 ई न कौंसापेक्षां मोठा असल्यास ब ग ल सेकतोर
 ई ह न सेकतोरपेक्षां मोठा होईल, आणि लहान अ-
 सल्यास लहान होईल. आतां ब क आणि ई फ
 कौंस व ब ग क आणि ई ह फ सेकतोर अशीं
 चार पदे आहेत, आणि ब क कौंस व ब ग क सेक-
 तोर ह्यांचीं समव्यापके बल कौंस व ब ग ल सेक-
 तार हीं येतलीं आहेत, तसेंच ई फ कौंस व ई ह फ
 सेकतोर ह्यांचीं समव्यापके ई न कौंस व ई ह न से-
 कतोर हीं येतलीं आहेत, आणि हे सिद्ध केले आहे, कीं
 बल कौंस ई न कौंसापेक्षां मोठा असल्यास ब ग ल
 सेकतोर ई ह न सेकतोरपेक्षां मोठा होईल, बरोबर
 असल्यास बरोबर होईल व लहान असल्यास ल-
 हान होईल, ह्या करितां (१ बु० १ व्या व्या० म०)
 ब क कौंसास जर ई फ कौंस तर ब ग क सेकतो-
 रास ई ह फ सेकतोर.

१ कु० एक्याच वर्तुळाचे किंवा समान वर्तुळांचे

सरूप सेकतोर समान असतात.

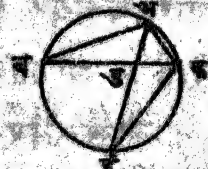
२ कु० वर्तुळमध्याजवळच्या कोनास जर चार काटकोन तर तो कोन ज्या कोंसावर आहे त्या कोंसास वर्तुळाचा परिघ. कारण वर्तुळमध्याशी जो कोन होतो त्यास जर एक काटकोन तर त्या प्रथमकोनासमोरच्या कोंसास वर्तुळपाद. त्या करिता वर्तुळमध्याजवळच्या कोनास जर चार काटकोन तर त्याच्या समोरच्या कोंसास वर्तुळाचा सर्व परिघ होईल.

ब सिद्धांत प्रमेय.

जो रेषा त्रिकोणाच्या शिरकोनाचे दोन समान भाग करते व पायास छेदते तिचा वर्ग आणि पायाच्या दोन खंडांचा काटकोन चौकोन हीं दुसऱ्या दोन बाजूंच्या गुणाकाराबरोबर असतात.

अबक एक त्रिकोण आहे. त्याच्या बअक शिरकोनाचे आहु रेषा

दोन समान भाग करते व



ती बक पायास ड स्थ

ळी छेदिते, त्यास $अड + बड \times कड = अब$

$\times अक$ हे सिद्ध करावयाचे. अबक त्रिकोणा.

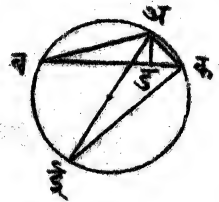
सभोंवतीं (४ बु० ५ व्या सि० प्र०) अबईक
वर्तुळ काढ, अड बाजू ई पर्यंत वाढीव, आणि
क, ई सांध.

ब अड कोन ड अ क कोनाबरोबर आहे,
आणि (३ बु० २१ व्या सि० प्र०) अबड कोन
अईक कोनाबरोबर आहे, तेव्हां अबड त्रिकोणा-
चा अडब कोन अईक त्रिकोणाच्या अकई
कोनाबरोबर आहे, म्हणून अबड आणि अईक हे
त्रिकोण समकोण आहेत, म्हणून (६ बु० ४ व्या सि०
प्र०) ब अः अडः :: ई अः अक, त्या क-
रितां (६ बु० १६ व्या सि० प्र०) ब अ × अक =
अड × ई अ. पण अड आणि ई अ ह्यांचा
काढकोन चौकोन (२ बु० ३ व्या सि० प्र०) अड आ-
णि ड ई ह्यांचा काढकोन चौकोन व अड चा वर्ग
ह्यांबरोबर आहे, त्यास ब अ × अक = अड
× ड ई + अड ई. (३ बु० ३५ व्या सि० प्र०) अड
× ड ई = बड × ड क, त्याकरितां ब अ × अक
= बड × ड क + अड ई, हे सिद्ध.

क सिद्धान्त. प्रमेय.

त्रिकोणाच्या शिरकोनापासून पायावर लंब केल
असतां तो लंब आणि त्रिकोणाच्या समोवतीं काढले-
ल्या वर्तुळाचा व्यास ह्यांचा काढकोन चौकोन दुसऱ्या
दीन बाजूचे काढकोन चौकोनाबरोबर असतो.

अबक एक त्रिकोण आहे, त्याचे अ शिर-
कोनापासून बक पाया
वर अड लंब केला आहे,
आणि अबक त्रिकोण
समोवतीं अकई क वर्तु



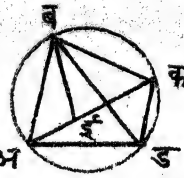
ळ काढले आहे, त्याचा व्यास अई आहे, त्यास अई
 \times अड = अब \times अक, हे सिद्ध करावयाचे.

ई, क सांध. अकई कोन अर्धवर्तुळांत-
ला आहे, ह्याकरितां तो (३ बु. २१ व्या सि. प्र.)
काढकोन आहे, म्हणून बडअ काढकोन अकई
कोनाबरोबर आहे, आणि (३ बु. २१ व्या सि. प्र.)
अबक कोन अईक कोनाबरोबर आहे, ह्याकरि-
तां अबड आणि अकई त्रिकोण समकोण आ-
हेत, म्हणून (६ बु. ४ व्या सि. प्र.) बअ: अड::

ईअः अक, म्हणून (६बु० १६ व्या सि० प्र०)
बअ × अक काटकोन चौकोन ईअ × अड
काटकोन चौकोनाबरोबर आहे, हे सिद्ध.

ड सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळांतील चौकोनाच्या कर्णरेखांचा काटकोन-
चौकोन त्या चौकोनाच्या समोरासमोरच्या बाजूंच्या का-
टकोन चौकोनांच्या बरोबर असतो.



अबकड चौ-
कोन वर्तुळाच्या आंत त्यास

लागून काढला आहे, आणि अक आणि बड
हे त्याचे कर्ण आहेत, त्यास अक आणि बड
ह्या कर्णांचा काटकोन चौकोन अड आणि बक
ह्यांचा काटकोन चौकोन व अ ब आणि ड क ह्यां-
चा काटकोन चौकोन ह्यांच्या बरोबर आहे, हे
सिद्ध करायचे.

अबईकोन डबक कोनाबरोबर कर,
आणि त्या दोन्ही कोनांत प्रत्येकी ईबड कोन मि-
ळीव. तेव्हा अबड कोन ईबक कोनाबरोबर

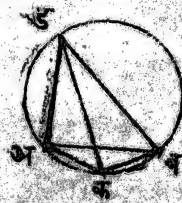
झाला. बड अ आणि बक अ हे दोन कोन अब
 कौंसावर आहेत, घा करितां (३ बु० २१ व्या सि० प्र०)
 ते परस्पर बरोबर आहेत, म्हणून अबड आणि
 कबई त्रिकोण समकोण आहेत, म्हणून (६ बु०
 ४ व्या सि० प्र०) बकः कई :: बडः अड,
 आणि म्हणून (६ बु० १६ व्या सि० प्र०) बक ×
 अड = कई × बड. अबई कोन
 ड बक कोना बरोबर केला आहे, व ब अ
 क कोन बड क कोना बरोबर आहे, का-
 रण ते एका कौंसावर आहेत, म्हणून अबई
 आणि ड बक हे दोन त्रिकोण समकोण आहेत, घा
 करितां अबः अई :: बडः डक, म्हणून
 अब × डक = अई × बड. बक × अड
 = कई × बड आणि अब × डक = अई
 × बड ह्या दोन समीकरणांची बेरीज घेतली असता
 बक × अड + अब × डक = कई × बड
 + अई × बड, पण कई × बड + अई × बड
 = अक × बड, घा करितां अक × बड = बक
 × अड + अब × डक.

ईसिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुलखंडाचे दोन समान भाग करून छेदन बिंदूपासून व वर्तुलखंडाच्या पायाच्या दोन टोंकांपासून वर्तुलाच्या परिघामध्ये कोणत्याही बिंदूपर्यंत रेखा केल्या असतां, पायाच्या टोंकांपासून काढलेल्या दोन रेखांची बेरीज आणि छेदनबिंदूपासून काढलेली रेखा, ह्यांचें गुणोत्तर वर्तुलखंडाचा पाया व वर्तुलखंडाच्या अर्धाचा पाया ह्यांचे गुणोत्तराबरोबर असते.

अबड एक वर्तुळ आहे, त्याचा अब हा खंड आहे, आणि त्याचे क स्थळीं दोन समान भाग केले आहेत. अ, क, ब ह्या तीन बिंदूपासून परिघांतील ड बिंदूपर्यंत अड, कड आणि बड रेखा काढल्या आहेत, त्यास अड + बड आणि कड ह्यांचें गुणोत्तर अब आणि अक ह्यांचे गुणोत्तराबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

अकबड हा वर्तुळामध्ये सल्लयन चौकोन



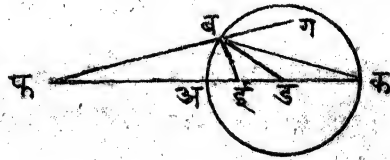
आहे, व त्याच्या अव आणि डक कर्णरेषा आहेत, त्यास (६ बु० ड सि० प्र०) $अड \times बक + डब \times अक = अव \times कड$; परंतु $अड \times बक$ काटकोन चौकोन $अड \times अक$ काटकोन चौकोनाबरोबर आहे, कारण बक आणि अक बरोबर आहेत. तेव्हां $अड \times अक + बड \times अक = अव \times कड$. (२ बु० १ व्या सि० प्र०) $अड \times अक + बड \times अक = (अड + बड) \times अक$, म्हणून $अड$ आणि $बड$ ह्या दोन रेषांची बेरीज आणि $अक$ रेषेच्या ह्यांचा काटकोन चौकोन अव आणि डक ह्यांचे काटकोन चौकोनाबरोबर आहे. समान काटकोन चौकोनांच्या बाजू व्यतिक्रमाने प्रमाणांत असतात, असे ६ बु० १४ सिद्धांतांत सिद्ध केले आहे, ह्याकरिता $अड + डब : डक :: अव : अक$, हे सिद्ध.

फ सिद्धांत प्रमेय.

वर्तुळाच्या व्यासांत असे दोन बिंदु घेतले की ते दोन बिंदु आणि वर्तुलमध्यबिंदु ह्यांच्या मध्ये

जे व्यासाचे खंडपडतील त्यांचा काटकोनचौकोन
अर्धव्यासाच्या वर्गाबरोबर होईल, आणि त्या दोन
बिंदूपासून वर्तुळपरिघांतील कोणत्याही बिंदूपर्यंत
रेषा काढल्या तर त्यांचें गुणोत्तर पूर्वोक्त दोन बिंदू व
परिघ ह्यांच्यामध्ये जे व्यासाचे खंड सांपडतात त्यां-
च्या गुणोत्तराबरोबर होतें.

अबक एक वर्तुळ आहे, आणि ड त्या-
चा मध्य आहे. क अ व्यास वाढवून त्यांत ई
आणि फ हे बिंदु असे घेतले आहेत, कीं ई ड
आणि ड फ ह्यांचा
काटकोन चौकोन



अड चे वर्गाबरो-
बर आहे, व परिघां-
तील ब बिंदूपर्यंत फ आणि ई ह्या बिंदूपासून
फ ब आणि ई ब रेषा केल्या आहेत, त्यास
बफ : बई :: फ अ : अई, हें सिद्ध कराव-
याचें.

ब, ड साध. फड आणि डई ह्यांचा का-
टकोन चौकोन अड चे वर्गाबरोबर आहे, आणि
अड बड बरोबर आहे, त्यास (६ बु०१० व्या

सि० प्र०) फडः बडः:: बडः डई. फडब
 आणि डईड ब ह्या दोन त्रिकोणांच्या साधारण को
 नाच्या आंगच्या बाजू प्रमाणांत आहेत, ह्या करितां ते
 (६ बु० ६ व्या सि० प्र०) समकोण आहेत, म्हणून
 डईब कोन फबड कोनाबरोबर आहे, व ड
 बई कोन डफब कोनाबरोबर आहे, म्हणून (६
 बु० ४ व्या सि० प्र०) फबः बडः:: बईः
 डईड. (९ बु० ९ व्या सि० प्र०) परावर्तनानें फबः
 बईः:: बडः डईड. बड अड बरोबर आ-
 हे, ह्या करितां फबः बईः:: अडः डईड. फ
 डः अडः:: अडः डई, हे चतुः प्रमाण
 (९ बु० ८ व्या सि० प्र०) फअः अडः:: अ
 ई डई असें होतें, आणि परावर्तनानें फअः
 अईः:: अडः डई. फबः बईः:: अडः
 डई. असें वर सिद्ध केले आहे, ह्या करितां (९ बु०
 ४ व्या सि० प्र०) फबः बईः:: फअः
 अई, हे सिद्ध.

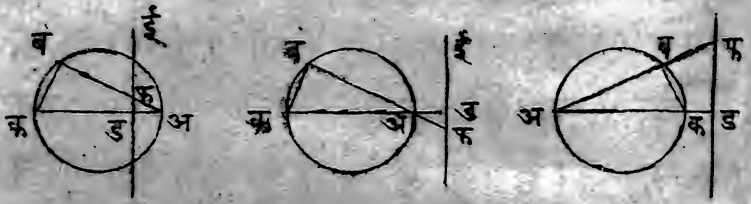
१ कु० फबः बईः:: फअः अई असें
 चतुः प्रमाण आहे, त्यास अब रेघ सांधली अस-
 ता ती फबई कोनाचे दोन समान भाग करिते,

हैं (६ बु० ३ व्या सि० प्र०) स्पष्ट आहे. फडः
 डकः डकः डई असें चतुः प्रमाण आहे,
 त्यास (५ बु० ७ व्या सि० व०) मिश्रणानें फकः
 डकः कईः ईड. आणि फअः अड
 (डकः) अईः ईड असें वरसिद्ध केले आहेच,
 ह्या करितां साम्यानें फअः अईः फकः
 कई, परंतु फबः बईः फअः अई असें
 चतुः प्रमाण आहे, ह्या करितां फबः बईः फकः
 कई. तेव्हां फब रेष ग पर्यंत वाढविली आणि
 बक रेष सांधली तर ई ब ग कोनाचे क व
 रेष दोन समान भाग करील, हे ६ बु० अ सिद्धां-
 नावरून स्पष्ट आहे.

ग सिद्धांत प्रमेय.

वर्तुलाच्या व्यासाच्या एका टोंकापासून ज्या
 केली आणि ती ज्या व व्यास ह्यांस आंतल्या आंगांनें
 किंवा बाहेरल्या आंगांनें छेदणारा असा एक लंब व्या-
 सावर केला तर त्यास व त्याच्या ज्या टोंकापासून ज्या
 केली आहे, त्याच्या आंगाचा व्यासाचा तुकडा ह्या -
 चा काटकोन चौकोन ज्या आणि तिचा अनुरूप खंड

ह्यांच्या काट कोन चौकोना बरोबर होतो.



अबक एक वर्तुळ आहे, आणि त्याचा व्यास अक आहे, त्या व्यासाचे अ दोंकापासून अब ज्या केली आहे, आणि त्या व्यासावर डई लंब केला आहे, तो अब ज्येस फ स्थळीं छेदितो, त्यास अब × अफ काटकोन चौकोन कअ × अड काटकोन चौकोना बरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

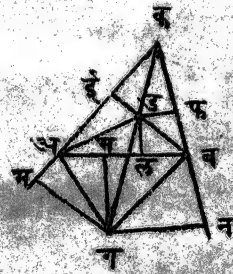
ब,क सांध. अबक कोन अर्धवर्तुळांत आहे, ह्या करितां (३ बु० ३१ व्या सि० प्र०) तो काटकोन आहे, व अडफ कोन काटकोन आहे, आणि ब अक कोन बअक आणि फ अड ह्या दोन त्रिकोणांस साधारण आहे, ह्या करितां ते समकोण आहेत, म्हणून (६ बु० ४ व्या सि० प्र०) बअःअकः अडःअफ, म्हणून (६ बु० १६ व्या सि० प्र०)

ब अ × अ फ काटकोन चौकोन अ क × अ ड
काटकोन चौकोनाबरोबर आहे, हे सिद्ध.

ह सिद्धांत प्रमेय.

त्रिकोणाच्या पायाकडील कोनांचे दोन समान
भाग करणाऱ्या रेषा ज्या बिंदूत मिळतात तो बिंदु,
व दोन बाजू वाढविल्या असता पायाच्या बाहेरील
आंगास जे कोन पडतात, त्यांचे दोन समानभाग कर-
णाऱ्या रेषा ज्या बिंदूत मिळतात तो बिंदु व शिरो-
बिंदु हे तिन्ही बिंदु एका सरळ रेषेत येतात, आणि
ती सरळ रेषा शिरकोनाचे दोन समान भाग करते.

अबक एक त्रिकोण आहे. त्याच्या पाया-
कडील कोनांचे अड आणि बड रेषा दोन
समान भाग करितात, आ-
णि त्या ड बिंदूत मिळ -
तात, व म अब आ -
णि अबन ह्या दोन
पायांच्या बाहेरच्या आं -



गच्या कोनांचे अग आणि बग रेषा दोन समान
भाग करतात, आणि त्या ग बिंदूत मिळतात, तर

ग बिंदु उ बिंदु आणि क शिरोबिंदु हे तिन्ही ए-
का सरल रेखेत आहेत, व ती रेखा अकब शिर-
कोनाचे दोन समान भाग करते, हे सिद्ध कसब्याचे.

उई, उफ, उल, गम, गस, आणि
गन लंब कर. अउई आणि अउल ह्या दोन
त्रिकोणांत ई अउ कोन उ अल कोनाबरोबर
आहे, ई काटकोन ल काटकोनाबरोबर आहे,
व अउ बाजू दोहों त्रिकोणां साधारण आहे,
ह्या करितां (१ बु. २६ व्या सि. प्र०) अल बाजू
अई बाजूबरोबर आहे, आणि उल बाजू
उई बाजूबरोबर आहे. ह्या प्रमाणेंच सिद्ध हो-
ईल, कीं बल बाजू बफ बाजूबरोबर आहे,
उल बाजू उफ बाजूबरोबर आहे, अम अ
स बरोबर आहे, गम गस बरोबर आहे,
बन बस बरोबर आहे, आणि गन, गस
बरोबर आहे. उई, उल बरोबर आहे, व उफ
उल बरोबर आहे, ह्यास्तव उई उफ बरो-
बर आहे, व ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होतें कीं गम
गन बरोबर आहे. कई उ आणि कफ उ
ह्या दोन त्रिकोणांत उई बाजू उफ बाजूबरो-
बर आहे, उ क बाजू साधारण आहे, आणि

कईड आणि कफड हे कोन काटकोन आहेत, ह्या करितां (१ बु० क सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण एकरूप, म्हणून क कोनाचे कड रेघेनें दोन समान भाग झाले असत. क म ग आणि क ग न हे दोन त्रिकोणही (१ बु० क सि० प्र०) एकरूप आहेत, ह्या करितां क कोनाचे क ग रेघेनें दोन समान भाग होतात. आतां क कोनाचे दोन समान भाग कड रेघेनें होतात, व त्याचेच दोन समान भाग क ग रेघेनें होतात, ह्या करितां क ग आणि कड ह्या दोन रेघा एकमेकांशीं जमतात.

कु० क अब त्रिकोणाच्या क अ आणि क ब ह्या दोन बाजूंचे ग म आणि ग न ह्या दोन लंबांनीं जे क म आणि क न बाह्य खंड पडले आहेत, त्यांपैकीं प्रत्येक क अब त्रिकोणाच्या बाजूंच्या परिमितीच्या अर्धाबरोबर आहे, व क शिरोबिंदूजवळच्या कई आणि क फ ह्या दोन खंडांपैकीं प्रत्येक खंड त्रिकोणाच्या बाजूंच्या परिमितीचे अर्ध व पाया ह्याचे वजाबाकीबरोबर आहे, व क अ बाजूचा पायाजवळचा कई खंड

बाजूंच्या परिमितीचें अर्ध व क व बाजू ह्यांचे वजा
बाकी बरोबर आहे, व क व बाजूचा पायाकड-
चा व फ खंड बाजूंच्या परिमितीचें अर्ध व क अ
बाजू ह्यांच्या वजा बाकी बरोबर आहे.

बाजूंच्या परिमितीचे अर्धा बरोबर ह मातुं.
अस = अम आणि बस = बन, ह्या करितां
कम + कन = बाजूंची परिमिती, परंतु कम
= कन म्हणून कम आणि कन ह्यांपैकी व-
त्येकी बरोबर ह आहे, म्हणून अम = ह-अक.
२ क ई + २ अ ई + २ अम = बाजूंची परि-
मिती = २ क फ + २ अ ल + २ ब ल. क ई
= क फ आणि अ ई = अ ल ह्या करितां २ अ
म = २ ब ल, म्हणून अम म्हणजे अस =
ब ल. दोन्ही पेढ्यांत स ल मिळीव, तेव्हां अ ल
= ब स. अम = ब ल व अ ई = अ ल, म्ह-
णून म ई = अ व, म्हणून क ई = ह-अ व.
अ ई = अ ल आणि अ ल = ब स आणि ब
स = बन म्हणून अ ई = ह-ब क = अम
= अस = ब ल = ब फ आणि अम = ह-अ
क, ह्या करितां ब फ = ह-अ क.

लसिद्धांत.प्रमेय.

त्रिकोणाचें क्षेत्रफल, बाजूंच्या परिमितीचें अर्ध व तें अर्ध आणि पाया ह्यांची वजाबाकी ह्यांचा काटकोनचौकोन व बाजूंच्या परिमितीचें अर्ध व इतर दोन बाजू, ह्यांच्या वजाबाक्यांचा काटकोनचौकोन ह्या दोन काटकोनचौकोनांचें मध्यप्रमाण आहे.

(ह सिद्धांताची आकृति पहा) अबक त्रिकोण कम \times कई आणि अम \times अई ह्या दोन काटकोनचौकोनांचें म्हणजे ह \times (ह - अब) आणि (ह - अक) \times (ह - बक) ह्यांचें मध्यप्रमाण आहे, हें सिद्ध करवयाचें.

(१ बु० २९ व्या सि० प्र०) ईड रेषा मग शीं समांतर आहे, म्हणून कई : ईड :: कम : मग. आतां कम : कम :: ईड : ईड, म्हणून (६ बु० २९ व्या सि० कु० प्र०) कई \times कम : ईड \times कम :: कम \times ईड : मग \times ईड. अबक त्रिकोण अडक, अडब आणि कडब ह्या तीन त्रिकोणांच्या बेरजेबरो-

बर आहे. (१ बु० ४१ व्या सि० प्र०) अडक,
 अडब आणि कडब हे तीन त्रिकोण अक
 \times डई, अब \times डल आणि बक \times डफ
 ह्या तीन काटकोन चौकोनांच्या अर्धांशां अनुक्रमे
 बरोबर आहेत, परंतु हीं सर्व अर्थे मिळून ईड \times
 कम काटकोन चौकोनां बरोबर आहेत, ह्या करितां
 अबक = ईड \times कम. ईअल आणि
 मअस हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बरो-
 बर आहेत, ह्या करितां ईअड आणि मअग
 हे दोन कोन मिळून एक काटकोना बरोबर आहेत.
 (१ बु० ३२ व्या सि० प्र०) अगम + मअग
 = एक काटकोन, ह्या करितां ईअड + मअग
 = अगम + मअग, म्हणून ईअड =
 अगम; ई आणि म ह्या बिंदूजवळचे कोन का-
 टकोन आहेत, ह्या करितां अगम आणि ई
 अड हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत, म्हणून अई:
 ईड :: अगः अम, ह्या करितां अई \times अम
 = ईड \times मग, ह्या करितां पूर्वी सांगितलेले व-
 तुः प्रमाण कम \times कई : अबक :: अबकः
 अग \times अई असें मानल्यास चिंता नाही, म्हणून

ह (ह-अब) : अबक :: अबक :
(ह-अक) (ह-बक)

कु० अ, ब, क कोनां समोरच्या बाजूंस
छ, छ, झ हीं नांवे दिलीं असतां छ(छ-क):
अबक :: अबक : (छ-छ) (छ
-छ)

रीप त्रिकोणाच्या तीन बाजू कळल्या असतां
त्याचे क्षेत्रफल कसे काढावे ह्या विषयीं रीत ह्या
शिद्दांतापासून निघते.

६ बुकाचे प्रश्न.

१ कोणत्याही तीन समांतर रेषांस ज्या रेषा मिळतात त्यांचे खंड प्रमाणात पडतात.

२ एका रेषेचे तीन खंड असे पाडले आहेत, कीं मगली रेषा व मधला खंड ह्यांचा काटकोन चौकोन आद्यंत खंडांच्या काटकोन चौकोनाबरोबर होतो, तर त्या रेषेचे ते खंड गायन प्रमाणांत पडले आहेत, हे सिद्ध करावयाचे.

३ वर्तुळाच्या परिघांत एक बिंदु घेऊन त्यापासून त्रिज्येवर एक लंब केला व त्याच बिंदूपासून त्रिज्या वाढविली असतां तिला मिळणारी अशी एक स्पर्शरेषा केली तर लंब आणि स्पर्शरेषा हीं त्रिज्येस ज्या बिंदूंत मिळतात, ते बिंदु व मध्यबिंदु ह्यांच्या मध्ये त्रिज्येचे जे दोन खंड पडतात त्यांचे मध्यपद त्रिज्या आहे.

४ भिन्न वर्तुळांचे कोंस एका ज्येवर असले आणि त्या ज्येचे एका ठिकाणसून निरनिराळ्या दिशांस रेषा केल्या तर त्या रेषा कोंसांचे खंड प्रमाणांत पाडतात.

५. विवक्षित रेषेचे गायन प्रमाणांत खंड पाडा-
वयाचे.

६. दोन रेषा सांगितल्या आहेत, त्यास तिसरी
अशी एक रेषा काढावयाची आहे, कीं सांगितलेल्या
रेषांपैकीं पहिल्या रेषेस जर दुसरी रेषा तर पहिल्या
रेषेवरील चौरसास जी रेषा काढावयाची ती वरील
चौरस असें होईल.

७. दोन रेषा सांगितल्या आहेत, त्यास तिसरी अ-
शी एक रेषा काढावयाची आहे, कीं सांगितलेल्या रेषां
पैकीं पहिल्या रेषेस जर जी रेषा काढावयाची ती तर
पहिल्या रेषेवरील चौरसास दुसरे रेषेवरील चौरस
असें होईल.

८. सांगितलेले कोनाचा असा एक त्रिकोण पाडा-
वयाचा आहे, कीं तो सांगितलेले क्षेत्राबरोबर होईल.

९. सांगितलेले त्रिकोणाचा त्याशीं सरूप असा ए-
क त्रिकोण पाडावयाचा आहे, कीं तो सांगितलेले त्रि-
कोणाशीं सांगितलेले प्रमाणांत होईल.

१०. चतुर्लांत सांगितलेले बिंदूंतून अशी ज्या
काढावयाची, कीं तिचे खंड सांगितलेले प्रमाणांत

पडतील.

११ त्रिकोणाच्या पाया, उंची व त्याच्या दुसऱ्या दोन बाजूंचे गुणोत्तर हीं सांगितलीं आहेत, त्यास तो त्रिकोण करावयाचा.

१२ त्रिकोणाच्या पायाच्या दोन्ही बाजूंस समोरील बाजूंवर त्यांचे दोन समान खंड करतील अशा रेषा काढल्या असतां त्या परस्परांस दोहोंस एक ह्या प्रमाणांत छेदितान.

१३ त्रिकोणाच्या पायाचीं दुसऱ्या दोन बाजूंस मिळेल अशी एक समांतर रेषा काढून तिची व पायाची व्युत्क्रम दोकें सांधलीं असतां त्या सांधणाऱ्या रेषाच्या बिंदूंत परस्परांस छेदितान तो बिंदु व शिरोबिंदु ह्यांस सांधणारी रेषा पायाचे दोन समानभाग करते व तिचे खंड गायन प्रमाणांत पडतात.

१४ वर्तुळाच्या दोन ज्यांनीं परस्परांस आंत छेदिलें असतां जो कोन होतो त्याचें माप त्या ज्यांच्या अंतर कोंसांचे बेरजेचे अर्धाबरोबर असतें, आणि ज्यांनीं परस्परांस बाहेरचे अंगास छेदिलें असतां जो कोन पडतो त्याचें माप त्या ज्यांच्या अंतर कोंसांच्या

वजाबाकीचे अर्धाबरोबर असते.

१५. तीन रेषा अखंड प्रमाणांत असल्या तर पहिल्या रेषेस जर दुसरी रेषा तर पहिली आणि दुसरी ह्यांच्या वजाबाकीचे वर्गास दुसरी आणि तिसरी ह्यांचे वजाबाकीचा वर्ग.

१६. त्रिकोणाच्या शिरकोनाजवळच्या कोनाचे दोन समान भाग करणारी अशी रेषा पाया वाढवून त्यास मिळे तो पर्यंत वाढविली असता त्या रेषेचे चौरस आणि पायाचे बाह्य खंडांचा काटकोन चौकोन ह्यांची वजाबाकी त्रिकोणाच्या दुसऱ्या दोन बाजूंच्या काटकोन चौकोनाबरोबर असते.

टीप ६. बु. ब. सिद्धांताचाच हा एक प्रकार होय.

१७. वर्तुळाच्या बाहेरचे अंगास एक बिंदु घेऊन त्या पासून वर्तुळास दोन स्पर्शरेषा केल्या व एक छेदनरेषा केली आणि स्पर्शबिंदु सांधले तर सांधणाऱ्या रेषेने छेदन रेषेचे गायन प्रमाणांत खंड पडतात.

१८. दोन त्रिकोणांत एकाचा एक कोन व दुसऱ्याचा एक कोन ह्यांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर असली व एकाचा दुसरा कोन दुसऱ्याच्या दुसऱ्या कोनाबरोबर असला तर एकाचा तिसरा कोन व दुसऱ्याचा तिसरा

कोन ह्यांच्या जवळच्या बाजू परस्पर प्रमाणांत अस-
नात.

१९ समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायामध्ये एक बिंदु घेऊन त्यांतून एक रेषा केली असता तिने एका बाजूचा आंताच्या आंगाने खंड पडतो व दुसऱ्या बाजूचा बाहेरील आंगाने खंड पडतो, त्यास ते दोन्ही खंड बरोबर असल्यास खंड करणाऱ्या रेषेचे पायामध्ये दोन समान भाग पडतात.

२० त्रिकोणामध्ये एक बिंदु घेऊन त्यामधून त्रिकोणाच्या कोणबिंदूपासून समोरच्या बाजूस मिळेल तो पर्यंत रेषा केल्या, आणि शिरोबिंदूतून पायाशीं समांतर अशी रेषा केली व पायाचे ज्या बिंदूत खंड झाले आहेत त्या बिंदूपासून दुसऱ्या दोन बाजूंचे ज्या बिंदूत खंड झाले आहेत त्या बिंदूतून रेषा केल्या, तर त्यांच्यामध्ये पायाशीं समांतर केलेल्या रेषेचा जो भाग सांपडतो त्याचे शिरोबिंदूमध्ये दोन समान भाग होतात.

२१ त्रिकोणाच्या शिरकोनापासून पायावर लंब केल्यामध्ये एक बिंदु घेऊन त्यांतून पायाचे दोन दोकांतून समोरील बाजूस मिळेल अशा रेषा केल्या तर पायातील छेदनबिंदूशी दुसऱ्या दोन बाजूंतील छेदनबिंदूस

सांधणाच्या रेषांनी पायांशीं जे कोन पडतात ते समान असतात.

२२ ज्या रेषा गायन प्रमाणांत असतात त्यांस छेदणाच्या रेषांचे गायन प्रमाणांत खंड पडतात.

२३ त्रिकोणामध्ये एक बिंदु घेऊन त्यांतून त्रिकोणाच्या कोणबिंदूपासून समोरील बाजूंस मिळत तों पर्यंत रेषा काढल्या आणि छेदन बिंदु सांधले तर कोणबिंदूपासून बाजूं पर्यंत काढलेल्या रेषांचे खंड गायन प्रमाणांत पडतात, आणि छेदनबिंदूंस सांधणाच्या रेषा बाजू वाढवून त्यांस मिळत तों पर्यंत वाढविल्या तर बाजूंचे गायन प्रमाणांत खंड पडतात.

२४ त्रिकोणाच्या बाहेर किंवा आंत एक बिंदु घेऊन त्यांतून कोनांपासून त्या समोरील बाजूंस मिळत तों पर्यंत रेषा काढल्या असता त्या रेषा ज्या स्थळीं मिळतात, तीं स्थळे सांधणाच्या रेषा बाजू वाढवून त्यांस मिळत तों पर्यंत वाढविल्या तर ज्या स्थळीं त्या मिळतात तीं तीन स्थळे एका सरळ रेषेत येतात.

२५ अर्धवर्तुल, आणि वर्तुलपाद हीं एका ज्येवर असलीं तर त्यांचे कोंसांमध्ये जें क्षेत्र सांपडतें तें ज्याचा कर्ण ती ज्या आहे अशा समद्विभुजकादकोन त्रिकोणा-

बरोबर होईल.

२६ त्रिकोणाची उंची, शिरकोन आणि दोन बाजूंची बेरीज किंवा वजाबाकी हीं सांगितलीं आहेत तर तो त्रिकोण काढावयाचा.

२७ त्रिकोणाचा पाया, उंची, आणि दोन बाजूंची बेरीज किंवा वजाबाकी हीं सांगितलीं असतां तो त्रिकोण काढावयाचा.

२८ त्रिकोणाची उंची, त्याच्या पायाकडील कोनांची वजाबाकी व दोन बाजूंची बेरीज किंवा वजाबाकी हीं सांगितलीं आहेत, तर तो त्रिकोण काढावयाचा.

२९ त्रिकोणाची उंची, त्याच्या पायाच्या दोन खंडांची वजाबाकी व त्याच्या दोन बाजूंची बेरीज किंवा वजाबाकी हीं सांगितलीं आहेत, तर तो त्रिकोण काढावयाचा.

३० त्रिकोणाची उंची, शिरकोन आणि सर्व बाजूंची बेरीज हीं सांगितलीं असतां तो त्रिकोण काढावयाचा.

